Pedro Correa Mendoza

MATEMÁTICAS

para las Ciencias Administrativas y Económicas

Universidad Laica
VICENTE ROCAFUERTE
de Guayaquil

Desde la Cátedra 6

Pedro Correa Mendoza

MATEMÁTICAS

para las Ciencias Administrativas y Económicas

colección Desde la Cátedra

Matemáticas para las Ciencias Administrativas y Económicas

Mg. Pedro Correa Mendoza

El autor es docente de la Universidad Laica VICENTE ROCAFUERTE de Guayaquil

El libro Matemáticas para las Ciencias Administrativas y Económicas fue arbitrado por la editorial ManglarEditores (info@manglareditores.com) bajo la metodología double peer review.

De esta edición:
Universidad Laica VICENTE ROCAFUERTE de Guayaquil, ULVR© 2019
Av. de las Américas # 70, frente al Cuartel Modelo
Guayaquil - Ecuador
PBX: (00-593-4) 259-6500
www.ulvr.edu.ec

Editado por:

EDITORIAL ULVR UNIVERSIDAD LAICA VICENTE ROCAFUERTE DE GUAYAQUIL

edilaica@ulvr.edu.ec
Av. de las Américas 70, frente al Cuartel Modelo
Conmutador: (+593-4) 2596500 Ext. 195

Matemáticas para las Ciencias Administrativas y Económicas

Primera Edición: 29 de marzo de 2019
ISBN: 978-9942-920-48-5
eISBN: 978-9942-920-47-8
Derecho de autor. GYE-010439
Tiraje: 100 ejemplares

Desde la Cátedra 6

Clasificación JEL
C Métodos matemáticos y cuantitativos
C0 Generalidades
C02 Métodos matemáticos

Palabra Clave
Matemáticas, Finanzas, Análisis matemático.
Mathematics, Finance, Mathematical analysis

Diseño y diagramación: Ing. Claudia Morán Barco / cmoranb@ulvr.edu.ec

El contenido de este libro puede ser utilizado, citando la fuente, de acuerdo a las Normas APA 6ta. edición:

Correa, P. (2019). *Matemáticas para las Ciencias Administrativas y Económicas.* Guayaquil, Ecuador: Editorial ULVR.

“A mi amada familia, y seres queridos.

Los ríos no llevan agua,
El sol las fuentes seco,…
¡Yo sé dónde hay una fuente
que no ha de secar el sol !

La fuente que no se agota,
es mi propio corazón…

V. Ruiz Aguilera (1862)

Después de Dios con
su infinito amor, mis
altos honores a las
ciencias médicas, me
han sanado otra vez.

P.G.C.M.

La inteligencia sin amor,
te vuelve perverso.
El dinero sin amor,
te vuelve avaro.
El poder sin amor,
te vuelve tirano.

Anónimo.

Prefiero estar ni muy exultante en la victoria,
ni muy apagado en la derrota.
Si hay una virtud en la vida es el ser equilibrado.

Vicente Del Bosque.

Puesto que soy imperfecto y necesito la tolerancia y la bondad de los demás,
también he de tolerar, los defectos del mundo hasta que pueda encontrar
el secreto que me permita ponerles remedio.

Mahatma Gandhi.

Índice

Capítulo # 4

Integrales

Prólogo

Este texto de matemáticas con aplicaciones describe en general los temas que constituyen un curso de matemáticas de nivel universitario. Se han incorporado muchas características orientadas a proporcionar ejercicios y problemas de aplicación a las Ciencias Administrativas y Económicas.

La obra destaca la importancia de las funciones, fórmulas para derivar, y elasticidad de una curva e integrales.

En el desarrollo de cada unidad se considera profundamente los contenidos teóricos como: Pilares conceptuales, las fórmulas que se van a aplicar en el desarrollo de los ejercicios, los conceptos y formulas en la solución de problemas.

El capítulo uno, titulado *Funciones*, se analizan los conceptos de variables, constantes, funciones, límites; además se desarrolla un análisis de límites, haciendo énfasis en que los límites de una función y de una variable son los cimientos del cálculo (primera derivada) cuando el incremento de la variable tiende a cero.

En el capítulo dos, se analiza la *interpretación geométrica de la primera derivada*; observaremos como una recta secante que pasa por dos puntos de una curva, se transforma en tangente; cuando uno de estos dos puntos es móvil y el otro fijo, por lo tanto el primero se acercará al segundo lo más cercano posible. Luego se plantean las formulas básicas que sirven para derivar funciones, y obtendremos la primera y segunda derivada.

El capíulo tres, estudia la *elasticidad de funciones y de arco*, enfoca ejercicios y problemas de aplicación. Además estudiaremos la elasticidad cruzada y las diferenciales con sus fórmulas y aplicaciones.

El capítulo cuatro, estudia las *integrales*, en la misma se desarrollan ejercicios aplicando cinco fórmulas básicas. Luego se calcula el área que hay entre curvas, los ejes y los extremos (límites) superior e inferior; para esto se aplica la integral definida.

Por último, calcularemos el excedente promedio de los consumidores y vendedores y finalizaremos con el cálculo del mercado monopolio.

Pedro Correa Mendoza

Capítulo 1
Funciones

Resumen

En esta unidad, se analiza los conceptos de variables, constantes, funciones y límites.

Se indica que el límite de una función y de una variable son los cimientos del cálculo, cuando el incremento de una variable tiende a cero.

Objetivos de aprendizaje

- Evaluar las funciones.
- Calcular el límite de una función.
- Aplicar la regla de los cuatro pasos para obtener la primera derivada.

1.1 Variable, constante y funciones

1.1.1 Variable

Una variable es un elemento algebraico que forma parte de una función, a la que se le puede asignar valores en el curso de un proceso. A las variables se las designa usualmente por las últimas letras del alfabeto (x, y, z)

Las variables se subdividen en dos tipos: independientes y dependientes.

La variable independiente es aquella a la cual se le puede asignar valores a voluntad arbitraria dentro de las limitaciones que dependen del problema en particular.

La variable dependiente o la función es aquella que depende sucesivamente en la medida que se da el valor a la variable independiente.

1.1.2 Constante

Una constante es un elemento algebraico que tiene un valor fijo durante el curso de un proceso. Las constantes se subdividen en: numéricas y arbitrarias.

Las constantes numéricas también llamadas absolutas son las que conservan los mismos valores numéricos durante un fenómeno, modelo o problema. Ejemplo: 4, 10, -5, $\sqrt{10}$, π, etc.

Las constantes arbitrarias también llamadas parámetros, son aquellas a las que se pueden asignar valores numéricos. Se representan por las primeras letras del alfabeto. Ej.:

$$\frac{x^2}{a^2}\,\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2\,y^2}{b^2\,b^2} = 1$$

Ejercicio de aplicación (constante numérica)

En una progresión aritmética se presenta el caso de la constante numérica (llamada diferencia común) esta diferencia de términos puede ser creciente o decreciente.

La progresión es creciente, si la diferencia aritmética es positiva.

La progresión es decreciente si la diferencia aritmética es negativa.

La fórmula que vamos a utilizar para demostrar la constante numérica es la siguiente

U = a + (n-1) d (formula del último término de una progresión aritmética)

U = ultimo termino

a = primer termino

n = número de términos

d = diferencia común

Ejemplo:

Encontremos el vigésimo término de la progresión aritmética

Utilizamos la formula U = a+(n-1) d

En donde a = 115; n= 20; d =-3 (constante numérica)

U= 115 + (20-1) (-3)

U= 115 + (19) (-3)

U = 115 -57 =58

Es la relación entre las variables independiente y dependiente, los valores de la variable independiente se denominan dominio, y los valores de la variable dependiente, rango o recorrido.

1.2 Evaluación de función

Función es una asignación de valores, para cada valor de una variable X (variable independiente) en un cierto conjunto, de exactamente un valor de otra variable Y (variable dependiente).

Relación es una correspondencia que hay entre dos conjunto de elementos, a cada elemento de primer conjunto le corresponde al menos un elemento del segundo conjunto

Función es una asignación de valores, para cada valor de una variable X (variable Independiente) en un cierto conjunto, de exactamente un valor de otra variable Y (variable Dependiente).

El conjunto en el que se pueden escoger los valores de x se llama dominio de la función. El Conjunto de todos los valores correspondientes de y se llama recorrido de la función o rango.

Para denotar una función se utiliza el símbolo f(x) y se lee f de x. Con el fin de distinguir entre diferentes funciones se cambia la letra inicial, como en F(x), d(x), f'(x), etc.

El conjunto en el que se pueden escoger los valores de x se llama dominio de la función. El conjunto de todos los valores correspondientes de y se llama recorrido de la función o rango.

Para denotar una función se utiliza el símbolo f(x) y se lee f de x. Con el fin de distinguir entre diferentes funciones se cambia la letra inicial, como en F(x), d(x), f'(x), etc. Evaluar una función consiste en ejecutar un conjunto de operaciones analíticas con la variable, por ejemplo:

Evaluar una función consiste en ejecutar un conjunto de operaciones analíticas con la variable, por ejemplo:

$Y = \sqrt{9} - x^2$

Paso 1: tabulamos la función

X	Y
0	3
1	2.82
2	2.23
3	0
-1	2.82
-2	2.23
-3	0

Paso 2: Graficamos la función

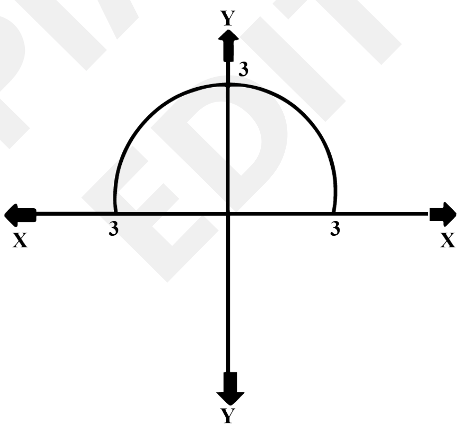


Figura 1. Gráfico de la función

Paso 3: Hallamos las soluciones

Dominio: $-3 \leq X \leq 3$ Representación con desigualdad compuesta

[-3; 3] Representación con notación de intervalo

Rango: $3 \leq y \geq 0$

Ejemplo 2:

Dibujar el grafico de las siguientes funciones y hallar sus dominios y recorridos

$F(x) = |x - 8|$

Paso 1: tabulamos la función

X	Y(x)
0	8
1	7
2	6
3	5
4	4
5	3
6	2
7	1
8	0
9	1
10	2
-1	9
-2	10
-3	11

Paso 2: Graficamos la función

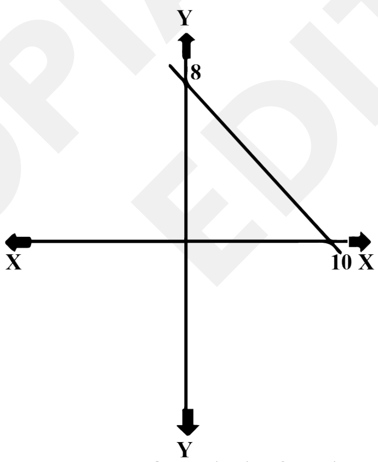


Figura 2. Gráfico de la función

Paso 3: Hallamos las soluciones

Dominio: todos los números Reales

Rango $y \geq 0$

Ejercicios de aplicación

Dado $F(x) = x^3 - x^2 + 8x - 3$. Hallar:

a) F(5); b) F(3); c) F(-2); d) F(5a)

a) $F(5) = (5)^3 - (5)^2 + 8(5) - 3 = 125 - 25 + 40 - 3 = 137$

b) $F(3) = (3)^3 - (3)^2 + 8(3) - 3 = 27 - 9 + 24 - 3 = 39$

c) $F(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 + 8(-2) - 3 = -8 - 4 - 16 - 3 = -31$

d) $F(5a) = (5a)^3 - (5a)^2 + 8(5a) - 3 = 125a^3 - 25a^2 + 40a - 3$

Siendo $F(x) = 8 - 4x^2 + 9x^3$. Calcular:

F(0); F(4); F(-4); F(1)

Desarrollo:

$F(0) = 8 - 4(0)^2 + 9(0)^3 = 8$

$F(4) = 8 - 4(4)^2 + 9(4)^3 = 8 - 64 + 576 = 520$

$F(-4) = 8 - 4(-4)^2 + 9(-4)^3 = 8 - 64 - 576 = -632$

$F(1) = 8 - 4(1)^2 + 9(1)^3 = 8 - 4 + 9 = 13$

Dado $F(x) = x^2 - 8x + 10$, demostrar que $F(t+1) = t^2 - 6t + 3$

Desarrollo:

$F(t+1) = (t + 1)^2 - 8(t + 1) + 10$

$F(t+1) = t^2 + 2t + 1 - 8t - 8 + 10$

$F(t+1) = t^2 - 6t + 3$

Dado $F(y) = y^2 - 3y + 7$, demostrar que $F(y + h) = y^2 - 3y + h(2y + h - 3) + 7$

$F(y + h) = (y + h)^2 - 3(y + h) + 7$

$F(y + h) = y^2 + 2hy + h^2 - 3y - 3h + 7$

$F(y + h) = y^2 - 3y + 2hy + h^2 - 3h + 7$

$F(y + h) = y^2 - 3y + h(2y + h - 3) + 7$

Dado f(x) = $\frac{1}{(x+1)}$ -1 demostrar que $= f(x+h) - f(x) = \frac{-h}{(x+h+1)(x+1)}$

$$\left[\frac{1}{(x+h)+1} - 1\right] - \left[\frac{1}{(x)+1} - 1\right]$$

$$\frac{1}{(x+h)+1} - 1 - \frac{1}{x+1} + 1$$

$$\frac{1}{[(x+h)+1]} - \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{x+1-1[(x+h)+1]}{[(x+h)+1][(x)+1]}$$

$$\frac{x+1-x-h-1}{[(x+h)+1][(x+1]} = \frac{-h}{(x+h+1)(x+1)}$$

Autoevaluación # 1

Evaluar las siguientes funciones:

1 Si $F(x) = 6-3x+4x^2$, calcular

F(10); F(-5); F(3a); F(9).

2 Dado $F(y) = y^3 - 2y^2 + 3y - 6$, calcular

F(-6); F(4); F(5); F(6ª); F(-2a).

3 Dado $F(x) = x^2 - 2x + 5$, demostrar que $F(x + h) = x^2 - 2x + h (2x + h - 2) + 5$

4 Dado $F(x) = 3x^2 - 4x + 10$, demostrar que $F(x+ h) - F(x) = h(6x+3h-4)$

5 Dado $F(x) = 3x^2 - 4x + 10$, demostrar que $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = 6x + 3h - 4$

6 Sea $F(x) = x^2 - 4x + 5$, evaluar

A) F(5); B) F(-7); C) F(x+2); D) F(x); E) F(x-2)

7 Sea $F(y) = y^2 + 4y^2 - 4y - 10$, calcular

A) F(6); B) F(-4); C) F(-3); D) F(t+1); E) (t+1)-F(t)

8 Dado $F(x) = x^3 - 6x^2 - 8x + 10$, demostrar que

A) F(0)=10; B) F(2)=-22; C) F(-5)=-225

9 Dado $F(x) = x^2 - 2x + 6$, hallar

A) $F(x+5)$; B) $F(x-5)$; C) $F(5^a)$; D) $F(-8)$; E) $F(x+h)$;

F) $F(x+h)-F(x)$; G) $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}$

1.3 Límites

Se dice que la variable v tiende a la constante l como límite, cuando los valores sucesivo de v son tales, que el valor numérico de la diferencia (v-l) puede llegar a ser, finalmente, menor que cualquier número positivo predeteminado tan pequeño como se quiera.

Ejemplo gráfico:

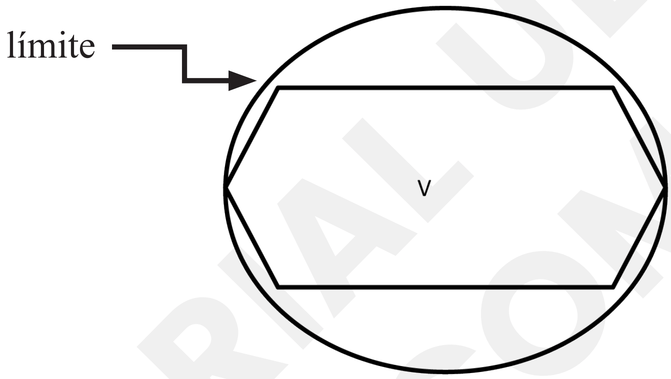


Figura 3. Gráfico de límites

El gráfico indica que cuando el número de lados del hexágono tiende al infinito, ocuparía el área total del círculo, y este seria el límite del hexágono.

La relación así definida se escribe lím v=l, también se usa v => l, que se leerá "v tiende hacia el límite l", y brevemente, "v tiende a l".

a) Hallar el límite que se indica

$$\lim_{x \to \infty} \frac{8x^3 + 3x + 2}{8x^2 + 2x + 3}$$

Cuando el límite de la variable tiende a infinito; se divide cada elemento del numerador y denominador para la variable de mayor grado

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{8x^3}{x^3} + \frac{3x}{x^3} + \frac{2}{x^3}}{\frac{8x^2}{x^3} - \frac{2x}{x^3} + \frac{3}{x^3}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{\frac{8}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8+\frac{3}{\infty^2}+\frac{2}{\infty^3}}{\frac{8}{\infty}-\frac{2}{\infty^2}+\frac{3}{\infty^3}} = \frac{8}{\infty} = 0$$

No Existe Limite

b) Calcular el límite de:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-5}{x^2-x-20}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x-5)}{(x-5)(x+4)}$$

Se simplifica (x -5), y se remplaza la x = 3

$$= \frac{1}{3+4} = \frac{1}{7}$$

c) Calcular el límite de:

$$\lim_{x\to 2a} \frac{x^2-a^2}{x^4-a^4}$$

$$\lim_{x\to 2a} \frac{(x+a)\,(x-a)}{(x^2-a^2)\,(x^2+a^2)} = \frac{(x+a)\,(x-a)}{(x+a)\,(x-a)\,(x^2+a^2)}$$

Se simplificó (x +a) (x – b) , y se remplaza la x = 2a

$$\lim_{x\to 2a} \frac{1}{4a^2+a^2}\ \frac{1}{5a^2}$$

1.3.1 Límites de una sucesión infinita

Es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos, por ejemplo, cuando n toma los valores 1, 2, 3, 4,…, la función definida por la $\frac{1}{3n+1}$ da la sucesión $\frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{13}$ la sucesión se llama una sucesión infinita para indicar que no hay un último término.

En el cálculo diferencial e integral desarrolado por Ayres, por término general o enésimo término de una sucesión infinita entendemos una fórmula Sn para el valor de la función que determina la sucesión infinita misma, se denota con frecuencia encerrando el término general entre llaves; como es (Sn), o especificando los primeros términos de la sucesión.

1.3.2 Límite de una sucesión

Sucesión es un conjunto de elementos que mantienen un orden secuencial creciente o decreciente.

La diferencia de una sucesión infinita con respecto a una sucesión; es que la primera no hay un último termino y la segunda tienden a un número fijo.

Si los términos de una sucesión (Sn) tienden a un número fijo C, es el límite de la sucesión y lo escribimos: Sn →C ó lim $_{n\to+\infty}$ Sn = C

Ejemplo: Consideramos la sucesión,

$$2, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{14}{5}, \frac{17}{6}, \ldots, 3 - \frac{1}{n}$$

(En la parte inferior del grafico consta en el contenido redactado.)

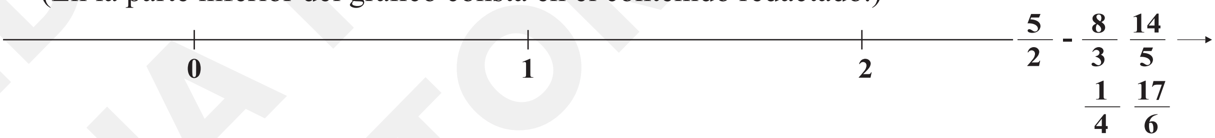


Fig. 4. Límite de una sucesión

Algunos términos que se han representado en el sistema de coordenadas de la figura 1 al crecer n, los sucesivos puntos se acumulan hacia el punto 3, de manera tal que su distancia al 3 acaba siendo menor que cualquier número positivo que se haya prefijado como medida de la proximidad al 3, por pequeño que sea el número prefijado. Así el punto, $3 - \frac{1}{1001} = \frac{3001-1}{1001} = \frac{3000}{1001} =, 2.997002997$ y todos los puntos, siguientes se encontrarán a una distancia de 3, por lo tanto . $\left(3 - \frac{1}{n}\right) = 3.$

Ejercicios resueltos: Sucesiones.

1.- Escribir los cinco primeros términos de las sucesiones siguientes.

a) $\left(\dfrac{3n}{3n-2}\right)$

$$S1 = \frac{3(1)}{3(1)-2} = \frac{3}{3-2} = \frac{3}{1} = 3$$

$$S2 = \frac{3(2)}{3(2)-2} = \frac{6}{6-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$S3 = \frac{3(3)}{3(3)-2} = \frac{9}{9-2} = \frac{9}{7}$$

$$S4 = \frac{3(4)}{3(4)-2} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

$$S5 = \frac{3(5)}{3(5)-2} = \frac{15}{15-2} = \frac{15}{13}$$

b) $(-2)^{n+1}\dfrac{3n}{1+n^2}$

$$S1 = (-2)^{(1)+1}\frac{3(1)}{1+(1)^2} = \frac{11}{2}$$

$$S2 = (-2)^{(2)+1}\frac{3(2)}{1+2^2} = -8\,\frac{6}{5} = -\frac{46}{5}$$

$$S3 = (-2)^{(3)+1}\frac{3(3)}{1+3^2} = 16\,\frac{9}{10} = \frac{169}{10}$$

$$S4 = (-2)^{(4)+1}\frac{3(4)}{1+4^2} = -32\,\frac{12}{17} = -\frac{556}{17}$$

$$S5 = (-2)^{(5)+1}\frac{3(5)}{1+5^2} = 64\,\frac{15}{26} = \frac{1679}{26}$$

Los términos pedidos son:

$$\frac{11}{2}, -\frac{46}{5}, \frac{169}{10}, -\frac{556}{17}, \frac{1679}{26}$$

Autoevaluación # 2

Escribir los cinco primeros términos de las sucesiones siguientes:

a) $\left[\dfrac{4n}{n^2+1}\right]$

b) $\left[\dfrac{3}{2}\,(-1)^{n+1}\,\dfrac{n}{(n-2)^2}\right]$

c) $\left[1-\dfrac{2}{5n}\right]$

d) $\left[\dfrac{1}{5n+2}\,(1)^{n+1}\right]$

e) $\left[\dfrac{n}{(n+1)(n+2)(n-2)}\right]$

f) $[\,(-1)^{3n+1}+4\,]$

g) $\left[\dfrac{8n}{n^2-1}\right]$

1.3.4 Límite de una variable

La noción de una variable que se aproxima a un límite se encuentra dada por geometría elemental, al establecer o deducir la fórmula que da el área del círculo, se considera el área de un polígono o regular inscrito con un número n cualquiera de lados, y se supone, después, que n crece infinitamente.

De acuerdo a Granville, el área variable tiende así hacia un límite y este límite se define como área del círculo. En este caso, la variable V (área) aumenta indefinidamente, y la diferencia a-v (siendo el área del circulo) va disminuyendo hasta que, finalmente, llega a ser menor que cualquier número positivo escogido de antemano, sin importar lo pequeño que éste se haya elegido.

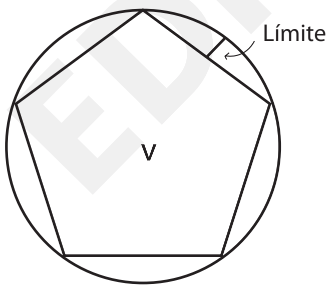


Figura 5. Límite de una variable (pentágono)

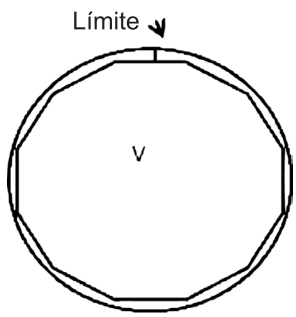


Figura 6. Límite de una variable (con más lados)

Podemos apreciar que en la Figura No. 5 el número de lados corresponde a un pentágono (5 lados), entonces el área comprendida entre el pentágono y la circunferencia se aprecia que es más grande con respecto a la Figura No. 6, en la que el número de lados ha aumentado de 5 lados a 12 lados (dodecágono); ahora por supuesto el área entre el dodecágono y la circunferencia ha disminuido.

1.3.5 Límite de una función

Ejemplo 1

La función de **ganancia** para un producto esta dada por

$P(x) = x^2 + 9x + 20$

Encuentra el limite de lim P(x)

$X \rightarrow 10$

Factorizamos la expresión

P(x)=(x+5) (x+4)

Remplazamos x = 10

P(10)= (10+5) (5+4)

P(10) = (15) (9)

P=(10)= 135

el limite es 135

Ejemplo 2

El ingreso total para un producto esta dado por

$R(x) = 1500x - x^2$

Donde x es el numero de unidades vendidad ¿Cuál es limite R(x)?

$X \rightarrow 50$

Como el limite R(x), se descompone la función R(x)

R(x) = x(1500-x)

Luego remplazamos

R(50) = 50 (1500 - 50)

R(50) = 50 (1450) = $ 72500

El limite de R(x) es $ 72500

$X \rightarrow 50$

Ejemplo 3

<u>Si el ingreso</u> por un producto es R(x) = 150x – 0.2x^2 y el ingreso promedio por unidades es

R (x) = $\frac{R(x)}{x}$, x > 0

Encuentra : $\lim\limits_{X \rightarrow 60} \frac{R(x)}{x}$

Como el limite de la variable $X \rightarrow 60$, procedemos de la siguiente manera

$$\lim_{x \to 60} \frac{150x - 0.2x^2}{x}$$

$$\lim_{x \to 60} (150 - 0.2x)$$

Remplazamos x = 60

$$\lim_{x \to 60} 150 - 0.2(60)$$

$$\lim_{n \to 60} 150 - 12 = 138$$

Ejemplo 4

Suponga que las **<u>ventas diarias</u>** (en dólares) t días después de terminar uan campaña publicitaria son S = S (t) = 300 + $\frac{1500}{t+1}$

a. Encuente S(8)

b. Encuentre $\lim_{x\to 3} s(t)$

a. Remplazaremos directamente en la función S (8), porque no hay un propuesta de limite, tenemos

. $S = S\ (8) = 300 + \frac{1500}{8+1}$

$S = S\ (8) = 300 + 166.66$

$S = S\ (8) = 466.66$

b. Procedemos de la siguiente manera

$$S= S\ (t) = \frac{300(t+1)+1500}{t+1} = \frac{300t + 300+1500}{t+1}$$

$$S= S\ (t) = \frac{300t+1800}{t+1}$$

Factorizamos el nunerador

$$\lim_{t \to 3} s(t)\ \frac{300\ (t+6)}{t+1}$$

Remplazamos $t \to 3$

$$\lim_{t \to 3} s(t)\ \frac{300[(3)+6]}{(3)+1} = \frac{300(9)}{4} = 675$$

De acuerdo a Granville si F es una función, decimos que $f(x)_{n\to\infty}=A$, , si el valor de f(x) se hace arbitrariamente próximo a A cuando X se aproxima al valor de A.

Por ejemplo $\lim x^2{}_{n\to 4}=16$, ya que x^2 se hace arbitrariamente próximo a 16 cuando X se acerca a 4.

1.3.6 Límites Particulares

Los límites particulares son relaciones que se presentan en los procesos matemáticos, y se aplican de la siguiente manera: En cada uno de los ejemplos de los límites particulares se puede apreciar que V tiende a límite.

Escrito en forma de límites:

$$\lim_{v\to 0} \frac{c}{v} = \infty$$

$$\lim_{v\to\infty} cv = \infty$$

$$\lim_{v\to\infty} \frac{v}{c} = \infty$$

$$\lim_{v\to\infty} \frac{c}{v} = 0$$

Forma abreviada frecuentemente usada:

$$\frac{C}{O} = \infty$$

$$C * \infty = \infty$$

$$\frac{\infty}{C} = \infty$$

$$\frac{C}{\infty} = 0$$

Ejercicios resueltos: Límites

1. Interprete $\lim_{x\to\mp\infty}$ como abreviatura de $\lim_{n\to\infty}$ o $\lim_{n\to-\infty}$ y calcule el límite dividiendo primero numerador y denominador para la potencia más alta de X presente.

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{8x^3-5x+2}{7x^3-4x^2-6}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{8x^3}{x^3} - \frac{5x}{x^3} + \frac{2}{x^3}}{\frac{7x^3}{x^3} - \frac{4x^2}{x^3} - \frac{6}{x^3}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8 - \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{7 - \frac{4}{x} - \frac{6}{x^3}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8 - \frac{5}{\infty^2} + \frac{2}{\infty^3}}{7 - \frac{4}{\infty} - \frac{6}{\infty^3}} = \frac{8}{7}$$

b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{7x^2\ 2x - 6}{9 + 6x^2 - 3x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{7x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} - \frac{6}{x^2}}{\frac{9}{x^2} + \frac{6x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{7 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x^2}}{\frac{9}{x^2} + 6 - \frac{3}{x}}$$

$$\frac{7 + \frac{2}{\infty} - \frac{6}{\infty^2}}{\frac{9}{\infty^2} + 6 - \frac{3}{\infty}} = \frac{7}{6}$$

c) $$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3}{x^2 + 2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x^3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3} + \frac{2}{x^3}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4}{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}}$$

$\lim_{x\to\infty} \frac{4}{0} = -\infty$, no existe límite.

$\lim_{x\to\infty} \frac{4}{0} = +\infty$, no existe límite.

Dado $f(x) = x^3+5x$, Hallar $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3+5(x+h)-(x^3+5x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3+5x+5h-x^3-5x}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{3x^2h+3xh^2+h^3+5h}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2+3xh+h^2+5)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} 3x^2+3x(0)+(0)+5= 3x^2 + 5$$

2. Calcular los límites que se indican

a) $\lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x^2-6x+9} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-3)}{(x-3)^2} = \frac{1}{(x-3)} = \frac{1}{(2-3)} = -\frac{1}{1} = -1$

b) $\lim_{x\to -4a} \frac{x3 + 64}{x^2-16} = \lim_{x\to -4a} \frac{(x+4)(x^2-4x+16)}{(x+4)\,(x-4)} = \lim_{x\to -4a} \frac{x^2-4x+1}{(x-4)} \lim_{x\to -4a} \frac{16a^2+16a+16}{-4a-4}$

Autoevaluación # 3

Calcular:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-5x+2}{x^3+2x}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{8x^4-3x^3+2x}{4x^4-6x^2+2}$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{8x+3}{6x-2}$

d) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5x+6}{x+3}$

e) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2+4x+4}{(x+2)}$

f) $\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2-1}$

g) $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

h) $\lim_{n\to\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2-5x+6}$

i) $\lim_{x\to\infty} \frac{1x^3 -2x^2+5x-1}{x^4-3x^3+2x+5}$

j) $\lim_{x\to\infty} \frac{9x^4 -5x+2}{10x^4-3x^2+3}$

k) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+5}{x^4}$

l) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-2x+1}{(x-1)^2}$

m) $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-16}{x^2+8x+16}$

n) $\lim_{t\to 2a} (t^2-4t+4)$

0) $\lim_{x\to a} \frac{x^3-27}{(x^2+3x+9)}$

p) $\lim_{x\to a} \frac{x^2-25}{x^2+10x+25}$

Problemas propuestos

1)Ingreso S. el ingreso por un producto es R(x) = 200 x – $0.1x^2$ y el ingreso promedio por unidad es R(x) = $\frac{R(x)}{x}$, x > 0

Encuentre $\lim_{x\to 15} \frac{R(x)}{x}$

2) Ingreso. El ingreso total para un producto esta dando por:

R (x) = 1200 x - x^2

Donde x es el número de unidade vendidas ¿ Cuál es el limite de $\lim_{x\to 40} R(x)$?

3) Ganancia si la función gerencial para un producto estándar por

P (X) = x^2 + 5x + 4

Encuentre : $\lim_{x \to 8} P(x)$

4) Ventas. Suponga que las ventas diarias (en dólares), t días después de terminar una campana públicitaria son :

$S = S\ (t) = 200 + \frac{100}{t+1}$

Encuentre S(6)

Encuentre $\lim_{t \to 6} S(t)$

1.4 Derivación de funciones

La derivada también se la conoce con el nombre de Coeficiente Diferencial, es la tasa de cambio instantanea de las variables asociadas

La derivación es una regla que comprende cuatro pasos, para obtener la primera derivada de una función.

Dentro de este cálculo el incremento está representado por el símbolo Δ (delta) y, en donde se lee:

Δx incremento de x,

Δy incremento de y,

$\Delta \theta$ incremento de θ.

Primer paso: Se reemplaza en la función la variable X por $X+\Delta X$, y se obtiene el nuevo valor de la función $Y+\Delta Y$.

Segundo paso. Se resta el valor dado de la función del nuevo valor y se obtiene ΔY (incremento de la función).

Tercer paso: Se divide $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Cuarto paso: Se calcula el límite de este cociente cuando ΔX tiende a cero en el segundo miembro.

1. Hallar la derivada de la función $Y=2X^2 - 3$

$Y=2X^2 - 3$

1º Paso.

$$Y+\Delta y=2(x+\Delta x)^2-3$$

$$Y+\Delta y=2[x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2]-3$$

$$Y+\Delta y=2x^2+4x\Delta x+2(\Delta x)^2-3$$

2º Paso.

$$Y+\Delta y= \quad 2x^2+4x\Delta x+2(\Delta x)^2-3$$

$$-Y= \quad \underline{-2x^2 \qquad\qquad\qquad +3}$$

$$\therefore\ \Delta y = \therefore \quad 4x\Delta x+2(\Delta x)^2 \therefore$$

3º Paso.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{4x\Delta x}{\Delta x}+\frac{2(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=4x+2\Delta x$$

4º Paso.

Dx→0 en el segundo miembro

$$\frac{dy}{dx}=4x+2(0)$$

$$\frac{dy}{dx}=4x$$

2. Hallar la derivada de la siguiente función

$$\boldsymbol{Y=3t^3-2t^2}$$

$$Y + \Delta y = 3(t + \Delta t)^3 - 2(t + \Delta t)^2$$

$$Y + \Delta y = 3[t^3 + 3t^2\,\Delta t + 3t(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3] \quad - 2[t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2]$$

$$Y + \Delta y = 3t^3 + 9t^2\Delta t + 9t(\Delta t)^2 + 3(\Delta t)^3 - 2t^2 - 4t\Delta t - 2(\Delta t)^2$$

$$-Y \quad = 3t^3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 2t^2$$

$$\therefore\ \Delta y = \therefore \quad 9t^2\Delta t + 9t(\Delta t)^2 + 3(\Delta t)^3 \therefore \quad -4t\Delta t - 2(\Delta t)^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{9t^2\Delta t}{\Delta t} + \frac{9t(\Delta t)^2}{\Delta t} + \frac{3(\Delta t)^3}{\Delta t} - \frac{4t\Delta t}{\Delta t} - \frac{2(\Delta t)^2}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = 9t^2 + 9t(\Delta t) + 3(\Delta t)^2 - 4t - 2\Delta t$$

$\Delta t \to 0$, en el segundo miembro

$$\frac{dy}{dt} = 9t^2 + 9t(0) + 3(0)^2 - 4t - 2(0)$$

$$\frac{dy}{dt} = 9t^2 - 4t$$

$$\boldsymbol{Y = \frac{x^2}{1 + X}}$$

$$Y + \Delta y = \frac{(x + \Delta x)^2}{1 + (x + \Delta x)}$$

$$Y = -\frac{x^2}{1+x}$$

$$\therefore\ \Delta y = \frac{(x + \Delta x)^2}{1 + (x + \Delta x)} - \frac{x^2}{1 + x}$$

$$\Delta y = \frac{[x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2](1 + x) - x^2[1 + x + \Delta x]}{[1 + (x + \Delta x](1 + x)}$$

$$\Delta y = \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + x^3 + 2x^2\Delta x + x(\Delta x)^2 - x^2 - x^3 - x^2\Delta x}{[1 + (x + \Delta x)](1 + x)}$$

$$\Delta y = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 + x^2\Delta x + x(\Delta x)^2}{[1 + (x + \Delta x)](1 + x)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x + \Delta x + x^2 + x\Delta x)}{[1 + (x + \Delta x)](1 + x)} \div \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x + \Delta x + x^2 + \Delta x)}{[1 + (x + \Delta x)](1 + x)} \circ \frac{1}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x + \Delta x + x^2 + \Delta x}{[1 + (x + \Delta x)](1 + x)}$$

$\Delta x \to 0$, en el segundo miembro

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + x^2}{(1 + x)^2}$$

$$\boldsymbol{Y = \frac{1 + x^2}{x}}$$

$$Y + \Delta y = \frac{1 + (x + \Delta x)^2}{(x + \Delta x)}$$

$$-y = -\frac{1+x^2}{x}$$

$$\therefore \; \Delta y = \frac{1 + (x + \Delta x)^2}{(x + \Delta x)} - \frac{1 + x^2}{x}$$

$$\Delta y = \frac{x[1 + x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2] - (x + \Delta x)(1 + x^2)}{x(x + \Delta x)}$$

$$\Delta y = \frac{x + x^3 + 2x^2\Delta x + x(\Delta x)^2 - x - x^3 - \Delta x - x^2\Delta x}{x(x + \Delta x)}$$

$$\Delta y = \frac{x^2\Delta x + x(\Delta x)^2 - \Delta x}{x(x + \Delta x)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(x^2 + x - 1)}{x(x + \Delta x)} \div \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(x^2 + x - 1)}{x(x + \Delta x)} \circ \frac{1}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^2 + x - 1}{x(x + \Delta x)}$$

$\Delta x \to 0$, en el segundo miembro

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x^2 + x - 1}{x(x + 0)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x^2 + x - 1}{x^2}$$

Autoevaluación # 4

Derive las siguientes funciones, aplicando la regla de los cuatro pasos.

1. $Y = 3x^2 + 2x - 5$

2. $S = 2t^3 + 5t^2$

3. $Y = \frac{3x + x^2}{x}$

4. $Y = \frac{2x}{1 + 2x^2}$

Capítulo 2
Fórmulas para derivar

Resumen

En este tema tratamos a la primera derivada desde el punto de vista geométrico, cosa que es independiente con los respecto a los cuatro pasos de la derivación, se debe observar que aquí hay una secuencia de conocimiento científico que se van desarrollando en la medida que logremos llegar a las formulas para derivar las funciones.

Analizamos la interpretación geométrica de la primera derivada, indicando como una recta secante que pasa por dos puntos se transforma en recta tangente, cuando uno de estos dos puntos es móvil y el otro punto es fijo; por lo tanto, el primero se acercará al segundo lo más cercano posible y en esa instancia se origina la primera derivada, cuando el incremento de la variable tiende a cero.

Objetivos de aprendizaje

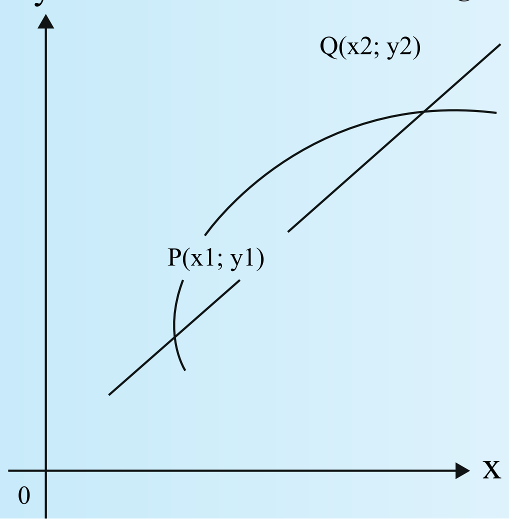
- Interpretar geométricamente la primera derivada.
- Obtener la primera derivada aplicando fórmulas.
- Aplicar la primera derivada a los problemas de economía y administración.
- Encontrar los puntos máximos y mínimos de una curva, aplicando cálculo diferencial.

2.1 Interpretación geométrica de la primera derivada

Una vez que han sido desarrolladas y asimiladas las operaciones básicas con las funciones y el concepto de límite, dirigiremos ahora nuestra atención a la interpretación gráfica de la razón de variación de una función. Esta interpretación, que es básica para la compresión del cálculo, se refiere a la pendiente de la tangente a la curva de una función.

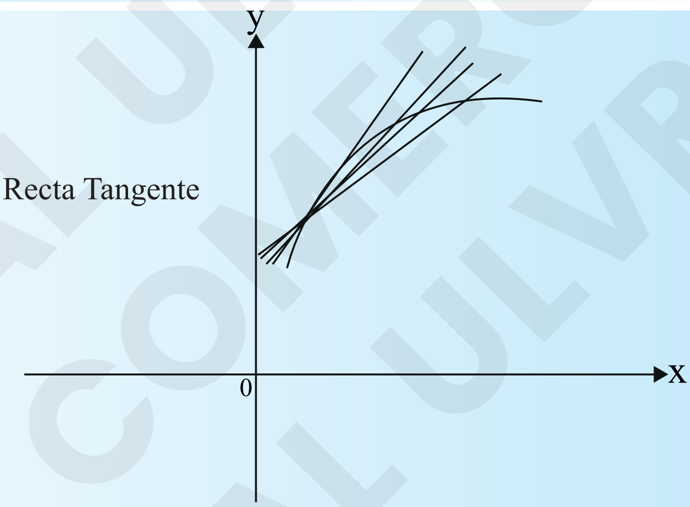
Consideremos los puntos P $(x_{1,} y_1)$ y Q$(x_{2,} y_2)$ en la figura 3. Sabemos que la pendiente de la recta que pasa por estos puntos está dada por $m = \frac{y^2 - y^1}{x^2 - x^1}$ Esta, sin embargo, es la pendiente de la recta que pasa por P y Q y no de otra recta. Si hacemos que Q tome una posición más cercana a P, la pendiente de PQ se aproximará a la pendiente de la tangente a la curva en P (ver figura 4). De hecho, cuanto más se acerca Q a P, mayor será esta aproximación. No es posible hacer que Q coincida con P, pues entonces no se podría definir la pendiente de PQ en términos de las coordenadas de los dos puntos. La pendiente de la recta tangente, a menudo denominada pendiente de la curva, es el valor límite de la pendiente de PQ cuando Q se aproxima a P.

Figura 7



En esta secuencia grafica se puede apreciar que en cada una de las curvas hay dos puntos por donde pasa una recta secante, un punto es fijo y el punto es móvil, en la medida que el punto móvil se carca al punto fijo lo mas cercano posible la recta secante se convierte en recta tangente, dando origen al teorema de la primera derivada; que esta en el contenido del libro. (Figura 7)

Figura 8. Recta Tangente



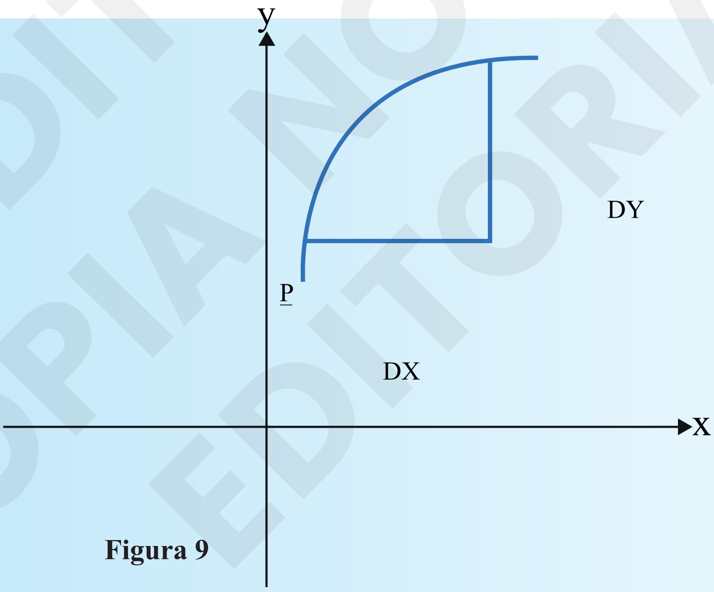


Figura 9

En esta secuencia gráfica se puede apreciar que en cada una de las curvas hay dos puntos por donde pasa una recta secante, un punto es fijo y el punto es móvil, en la medida que el punto móvil se carca al punto fijo lo más cercano posible la recta secante se convierte en recta tangente, dando origen al teorema de la primera derivada. (Figura 9)

Teorema de la primera derivada.- *El valor de la derivada en cualquier punto de una curva es igual a la pendiente de la tangente a la curva en aquel punto.*

1. **Hallar la pendiente de la tangente a la curvaW $y = x^2 + 2x$ en el punto P (1,3), determinando el límite de la pendiente de las rectas PQ cuando Q se acerca a P.**

x	y
0	0
1	3
2	8
-1	-1
-2	0
-3	3

Punto	Q	Q	Q	Q	P
X_2	2	1.5	1.3	1.01	1
Y_2	8	5.25	4.29	3.04	3
y_2-3	5	2.25	1.29	0.04	
x_2-1	1	0.5	0.3	0.01	
$m=\frac{y2-3}{x2-1}$	5	4.5	4.3	4	

Se puede apreciar en la tabla que hay un punto fijo P (1,3), además esta la tabulación que indica que la función esta remplazándose secuencialmente; en la medida que se remplaza hay un cambio de valores; este cambio de valores corresponde al valor que va obteniendo la pendiente.

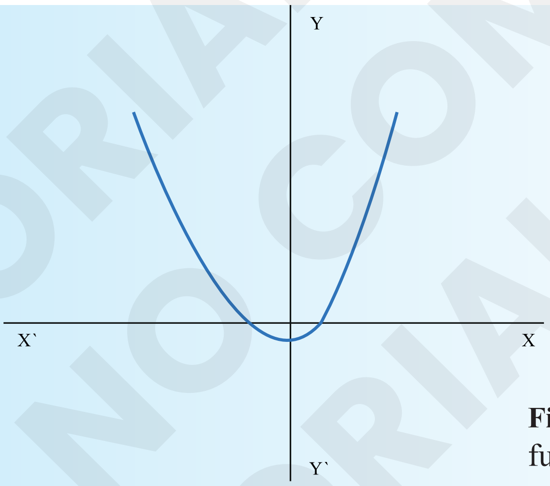


Figura 10. Gráfica de la función.

2. **Hallar la pendiente de la tangente a la curva $y = 5 – x^2$ en el punto P (1; 4), determinando el límite de las pendientes de las rectas PQ cuando Q se acerca a P**

x	y
0	5
1	4
2	1
3	-4
-1	4
-2	1

Punto	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	P
X_2	2	1.5	1.1	1.01	1
Y_2	1	2.75	3.79	3.9799	4
y_2-4	-3	-1.25	-0.21	-0.0201	
x_2-1	1	0.5	0.1	0.01	
$m=\frac{y2-4}{x2-1}$	-3	-2.5	-2.1	-2.01	

Autoevaluación # 5

Hallar la pendiente de la tangente a la curva en el punto que se indica, determinando el límite de las pendientes de las rectas PQ cuando Q se acerca a P.

1) $Y = x^2 - 1$ P (0; -1)

2) $Y = 1 - x^2$ P (0; 1)

2.2 Fórmulas para obtener la primera derivada

2.2.1 Derivada de una constante

La derivada de una constante es cero. En cálculo se considera constante a todos los números reales y a las primeras letras del alfabeto.

$$\frac{dc}{dx} = 0$$

2.2.2 Derivada de una variable con respecto a sí misma

La derivada de una variable con respecto a sí misma es la unidad.

$$\frac{d(x)}{dx} = 1$$

2.2.3 Derivada de una suma

La derivada de la suma algebraica de un número finito N de funciones es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones.

$$\frac{d}{dx}(u + v - w) - \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$

2.2.4 Derivada del producto de una constante por una función

La derivada del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la derivada de la función.

$$\frac{d}{dx}(cv) = c\,\frac{dv}{dx}$$

2.2.5 Derivada del producto de dos funciones

La derivada de un producto de dos funciones es igual al producto de la primera función por la derivada de la segunda función, más el producto de la segunda función por la derivada de la primera.

$$\frac{d}{dx}\,(uv) = u\,\frac{dv}{dx} + v\,\frac{du}{dx}$$

2.2.6 Derivada de la potencia de una función, siendo el exponente constante

La derivada de la potencia de una función de exponente constante es igual al producto del exponente por la función elevada a un exponente disminuido en una unidad y por la derivada de la función.

$$\frac{d}{dx}\,(v^n) = n\,v^{n-1}\,\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\,(x^n) = n\,x^{n-1}$$

2.2.7 La derivada de un cociente

La derivada de un cociente de funciones es igual al producto del denominador por la derivada del numerador, menos el producto del numerador por la derivada del denominador, todo dividendo por el cuadrado del denominador.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\,\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

2.2.8 La derivada del cociente de una función dividida por una constante

La derivada del cociente de una función dividida por una constante es igual a la derivada de la función dividida por la constante.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{\frac{du}{dx}}{c}$$

Ejercicios resueltos: Derivadas

Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

1. $Y = 3x^3 + 2x^2 - 5x + 10$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\,\frac{(3x^3)}{dx} + \frac{d\,(2x^2)}{dx} - \frac{d\,(5x)}{dx} + \frac{d\,(10)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3\,\frac{dx^3}{dx} + 2\,\frac{dx^2}{dx} - 5\,\frac{dx}{dx} + \frac{d^{10}}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3\,(3x^2) + 2\,(2x) - 5\,(1) + 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 9\,x^2 + 4x - 5$$

2. $Y = (6x^2 - 3x)^2$

$$y = (6x^2)^2 - 2\,(6x^2)(3\,x) + (3x)^2$$

$$y = 36x^4 - 36x^3 + 9x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(36\,x^4)}{dx} - \frac{d\,(36x^3)}{dx} + \frac{d\,(9x^2)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 36\,\frac{d(x^4)}{dx} - 36\,\frac{d\,(x^3)}{dx} + 9\,\frac{d\,(x^2)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 36\,(4x^3) - 36\,(3x^2) + 9\,(2\,x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 144\,x^3 - 108\,x^2 + 18x$$

3. Y= $\sqrt[3]{(6x^2 + 2x - 1)^2}$

Y= $(6x^2 + 2x - 1)^{\frac{2}{3}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}(6x^2 + 2x - 1)^{\frac{2}{3}-1}\,\frac{d}{dx}(6x^2 + 2x - 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}(6x^2+2x-1)^{-\frac{1}{3}}\left[\frac{d6x^2}{dx} + \frac{d2x}{dx} - \frac{d1}{dx}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}(6x^2+2x-1)^{-\frac{1}{3}}\left[6\frac{dx^2}{dx} + 2\frac{dx}{dx} - \frac{d1}{dx}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}(6x^2+2x-1)^{-\frac{1}{3}}[6(2x)+2(1)-0]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}(6x^2+2x-1)^{-\frac{1}{3}}(12x+2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{24x+4}{3(6x^2+2x-1)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{24x+4}{3\sqrt[3]{6x^2+2x-1}}$$

4. $Y = \frac{\sqrt{3x}}{6} - \frac{4}{\sqrt{x}}$

$$y = \frac{(3x)^{\frac{1}{2}}}{6} - \frac{4}{(x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$y = \frac{\left(3x^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - 4(6)}{6x^{\frac{1}{2}}}$$

$$y = \frac{3x-24}{6x^{\frac{1}{2}}}$$

$$y' = \frac{6x^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(3x-24) - (3x-24)\frac{d}{dx}\left(6x^{\frac{1}{2}}\right)}{(6x^{\frac{1}{2}})^2}$$

$$y' = \frac{6x^{\frac{1}{2}}(3) - (3x-24)\left(6\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)}{36x}$$

$$y' = \frac{18x^{\frac{1}{2}} - (3x-24)(3x^{-\frac{1}{2}})}{36x}$$

$$y' = \frac{18x^{\frac{1}{2}} - \frac{3(3x-24)}{x^{1/2}}}{36x}$$

$$y' = \frac{\frac{18x - 9x + 72}{x^{\frac{1}{2}}}}{\frac{36x}{1}}$$

$$y' = \frac{9x + 72}{36x^{\frac{3}{2}}}$$

5. $.Y = 8(\sqrt{(9\,x^3 + 2x^2 - \ 3x - 5)}^3$

$$\frac{d}{dx}(cv) = c\,\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 8\,\frac{d}{dx}\,(9x^3 + 2x^2 - 3x - 5)^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = 8\,\frac{d}{dx}\left[\frac{3}{2}(9x^3 + 2x^2 - 3x - 5)^{\frac{3}{2}-1}\,\frac{d}{dx}\,(9x^3 + 2x^2 - 3x - 5)\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = 8\,\frac{d}{dx}\left\{\frac{3}{2}(9x^3 + 2x^2 - 3x - 5)^{\frac{1}{2}}\left[9\,\frac{d(x^3)}{dx} + 2\frac{d(x^2)}{dx} - 3\,\frac{d(x)}{dx} - \frac{d5}{dx}\right]\right\}$$

$$\frac{dy}{dx} = 8\left\{\frac{3}{2}(9x^3 + 2x^2 - 3x - 5)^{\frac{1}{2}}\,[9\,(3x^2) + 2(2x) - 3(1)]\right\}$$

$$\frac{dy}{dx} = 8\left\{\frac{3}{2}(9x^3 + 2x^2 - 3x - 5)^{\frac{1}{2}}\,(27x^2 + 4x - 3)\right\}$$

$$\frac{dy}{dx} = 12\sqrt{9x^3 + 2x^2 - 3x - 5}\,(27x^2 + 4x - 3)$$

6. $S = \frac{(16t^2 - 3t + 6)^3}{10\ a}$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{\frac{du}{dx}}{c}$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{3(16t^2-3t+6)^2\frac{d}{dx}(16t^2-3t+6)}{10a}$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{3(16t^2-3t+6)^2\left[16\frac{d(t^2)}{dt}-3\frac{d(t)^1}{dt}+\frac{d(6)^0}{dt}\right]}{10a}$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{3(16t^2-3t+6)^2[16(2t)-3(1)]}{10a}$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{3(16t^2-3t+6)^2(32t-3)}{10a}$$

7. $y=\frac{4\sqrt{5x^2-3}}{5}$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{u}{c}\right)=\frac{\frac{du}{dx}}{c}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{d}{dx}4(5x^2-3x)^{\frac{1}{2}}}{5}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4\left[\frac{1}{2}(5x^2-3x)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}(5x^2-3x)\right]}{5}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4\left\{\left[\frac{1}{2}((5x^2-3x)^{-\frac{1}{2}})(5\frac{d(x^2)}{dx}-3\frac{d(x)}{dx})\right]\right\}}{5}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4\left\{\left[\frac{1}{2}(5x^2-3x)^{-\frac{1}{2}}(10x-3)\right]\right\}}{5}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{2(10x-3)}{(5x^2-3x)^{\frac{1}{2}}}}{5}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{20x-6}{5\sqrt{5x^2-3x}}$$

8. $y = \sqrt{\frac{2+6x}{2-6x}}$

$$y = \left(\frac{2+6x}{2-6x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$y = \frac{(2+6x)^{\frac{1}{2}}}{(2-6x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2-6x)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(2+6x)^{\frac{1}{2}} - (2+6x)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(2-6x)^{\frac{1}{2}}}{\left[(2-6x)^{\frac{1}{2}}\right]^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2-6x)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}(2+6x)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}(2+6x)\right] - (2+6x)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}(2-6x)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}(2-6x)\right]}{(2-6x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2-6x)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}(2+6x)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{d2}{dx} + 6\frac{dx}{dx}\right)\right] - (2+6x)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}(2-6x)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{d2}{dx} - 6\frac{dx}{dx}\right)\right]}{(2-6x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2-6x)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}(2+6x)^{-\frac{1}{2}}(+6) - (2+6x)^{\frac{1}{2}}\right]\left[\frac{1}{2}(2-6x)^{-\frac{1}{2}}(-6)\right]}{(2-6x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2-6x)^{\frac{1}{2}}\left[(2+6x)^{-\frac{1}{2}}(3)\right] - (2+6x)^{\frac{1}{2}}\left[(2-6x)^{-\frac{1}{2}}(-3)\right]}{(2-6x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3(2-6x)^{\frac{1}{2}}}{(2+6x)^{1/2}} + \frac{3(2+6x)^{\frac{1}{2}}}{(2-6x)^{1/2}}}{(2-6x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3(2-6x) + 3(2+6x)}{(2+6x)^{1/2}(2-6x)^{1/2}}}{(2-6x)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{6-18x+6+18x}{(2+6x)^{\frac{1}{2}}(2-6x)^{\frac{1}{2}}}}{\dfrac{(2-6x)}{1}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{12}{(2+6x)^{\frac{1}{2}}(2-6x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{12}{\sqrt{2+6x}\sqrt{(2-6x)^3}}$$

9. $y=\frac{3x^2+2}{5x-1}\,\frac{dy}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(5x-1)\frac{d}{dx}(3x^2+2)-(3x^2+2)\frac{d}{dx}(5x-1)}{(5x-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(5x-1)(6x)-(3x^2+2)(5)}{(5x-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{30x^2-6x-15x^2-10}{(5x-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{15x^2-6x-10}{(5x-1)^2}$$

10. $S=6a(3x^2-2)^2$

$$S=6a[(3x^2)^2-2(3x^2)(2)+(2)^2]$$

$$S=6a(9x^4-12x^2+4)$$

$$S=54ax^4-72ax^2+24a$$

$$\frac{ds}{dx}=\frac{d}{dx}(54ax^4-72ax^2+24a)$$

$$\frac{ds}{dx}=54a\frac{dx^4}{dx}-72a\frac{dx^2}{dx}+\frac{d(24a)}{dx}$$

$$\frac{ds}{dx}=54a(4x^3)-72a(2x)$$

$$\frac{ds}{dx} = 216ax^3 - 144ax$$

11. $Y = (6x^2 - 3)\sqrt{2x + 1}$

$$Y = (6x^2 - 3)(2x + 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = (6x^2 - 3)\frac{d}{dx}(2x + 1)^{\frac{1}{2}} + (2x + 1)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(6x^2 - 3)$$

$$\frac{dy}{dx} = (6x^2 - 3)\left[\frac{1}{2}(2x + 1)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}(2x + 1)\right] + (2x + 1)^{\frac{1}{2}}\left[6\frac{dx^2}{dx} - \frac{d3}{dx}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = (6x^2 - 3)\left[\frac{1}{2}(2x + 1)^{-\frac{1}{2}}\left(2\frac{dx}{dx} + \frac{d1}{dx}\right)\right] + (2x + 1)^{\frac{1}{2}}[6(2x)]$$

$$\frac{dy}{dx} = (6x^2 - 3)\left[\frac{1}{2}(2x + 1)^{-\frac{1}{2}}(2)\right] + (2x + 1)^{\frac{1}{2}}(12x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(6x^2 - 3)}{(2x + 1)^{\frac{1}{2}}} + 12x(2x + 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(6x^2 - 3) + 12x(2x + 1)}{(2x + 1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2 - 3 + 24x^2 + 12x}{(2x + 1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{30x^2 + 12x - 3}{\sqrt{2x + 1}}$$

12. $Y = \sqrt{4x^2 + 3}\sqrt{5x - 1}$

$$Y = \sqrt{(4x^2 + 3)(5x - 1)}$$

$$Y = \sqrt{20x^3 - 4x^2 + 15x - 3}$$

$$Y = (20x^3 - 4x^2 + 15x - 3)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d}{dx}(v^n) = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(20x^3 - 4x^2 + 15x - 3)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}(20x^3 - 4x^2 + 15x - 3)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(20x^3 - 4x^2 + 15x - 3)^{-\frac{1}{2}}\left[20\frac{dx^3}{dx} - 4\frac{dx^2}{dx} + 15\frac{dx}{dx} - \frac{d3}{dx}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(20x^3 - 4x^2 + 15x - 3)^{-\frac{1}{2}}[20(3x^2) - 4(2x) + 15(1)]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(20x^3 - 4x^2 + 15x - 3)^{-\frac{1}{2}}(60x^2 - 8x + 15)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(60x^2 - 8x + 15)}{2(20x^3 - 4x^2 + 15x - 3)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(60x^2 - 8x + 15)}{2\sqrt{20x^3 - 4x^2 + 15x - 3}}$$

Análisis marginal

La derivada tiene varias aplicaciones en la administración y la economía(tasa marginales). La tasa marginal es una tasa de cambio

Costo marginal

Suponga que el fabricante de ciento artículos descubre que con la finalidad de producción x de estos artículos a las semana, el costo total en dólares esta dado por.

C= 300 + 0.04x^2 . por ejemplo

Si se producen 150 articulos a la semana , el costo esta por

$$C = 300 + 0.04(150)^2$$

$$C = 300 + 0.04(22500)$$

$$C = 300 + 900$$

$C = \$1200$

El costo promedio por articulo al producir 150 articulos es

$$\frac{1200}{150} = \$\,8$$

Si el fabricante considera cambiar la tasa de producción de 150 a $(\,150 + \Delta x\,)^2$ unidades por semana, en donde Δx representa el incremento en la producción semanal . el costo es

$$C + \Delta c = 300 + 0.04\,(150 + \Delta x)^2$$

$$C + \Delta c = 300 + 0.04\,[(22500 + 300\Delta x + (\Delta x)^2]$$

$$C + \Delta c = 300 + 900 + 12\,\Delta x + 0.04(\Delta x)^2$$

$$C + \Delta c = 1200 + 12\,\Delta x + 0.04(\Delta x)^2$$

Por consiguiente, el costo extra determinado por la producción de los ariculos adicionales es:

$$\Delta c = (\,c + \Delta c) - c = 1200 + 12\,\Delta x + 0.04(\Delta x)^2 - 1200$$

$$= 12\,\Delta x + 0.04(\Delta x)^2$$

En consecuencia costo promedio por articulo de las unidades extras

$$\frac{AC}{AX} = 12\,\Delta x + 0.04(\Delta x)^2$$

$$\frac{AC}{AX} = 12 + 0.04\Delta x$$

Por ejemplo, si la producción crece de 150 a 200 articulos por semanan (de modo que $\Delta x = 50$) ,se sugiere que el costo promedio de los 50 articulos adicionales es igual a $12 + 0.04(\,50\,) = \$\,14$

Entoces, el costo marginal es el valor limite del costo promedio por articulo extra cuando este número de articulo extra tiene a cero, es decir

Costo marginal el $= \lim_{\Delta x \to 0}$

$= \$\ 12$

Entonces, el costo marginal es la derivada de la función de costo con respecto a la cantidad de producida.

Costo marginal $= \frac{dc}{dx}$

El costo marginal mide la tasa con que el costo se incrementa con respecto al incremento de la cantidad producida.

Ejemplo 2

Costo margina $\frac{AC}{AX} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (12 + 0.04x)$

$$\mathbf{C(x) = 0.001x^3 - 0.5x^2 + 50x + 200}$$

Determinar el costo marginal como una función de X. Evaluar el costo marginal cuando la producción esta dada por

X = 40 , X = 60

$$\mathbf{C(x) = \frac{d}{dx} = 0.001\,(3x^2) - 0.5\,(2x) + 50(1) + 0}$$

$$\mathbf{0.003x^2 - 1x + 50}$$

Esta función, el costo marginal da el costo promedio por articulo de crecimiento de la producción por una pequeña cantidad dado que ya se ha producida por articulo, cuando se han producido 40 unidades, el costo marginal de los artículos extra están dado por:

$$\mathbf{C(40) = 0.003(40)^2 - 1(40) + 50}$$

$$\mathbf{C(40) = 0.003(1600) - 40 + 50}$$

$$\mathbf{C(40) = \$\,14.8}$$

Si x = 60 articulos, el costo marginal es :

$$\mathbf{C(60) = 0.003\,(60)^2 - 1\,(60) \quad + 50}$$

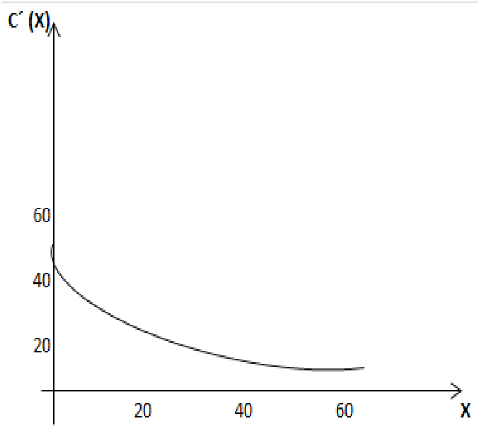
$$\mathbf{C(60) = 0.003\,(3600) - 60 + 50}$$

$$\mathbf{C(60) = 10.8 - 60 + 50 = 0.8}$$

Podemos apreciar que el costo marginal decrece a medida que la producción aumenta de 40 a 60 unidades.

La razón de esto estaba es las economía de escala, que provoca la fabricación de pequeñas cantidades de bienes sean relativamente más cara que la producción de grandes cantidades.

Sin embargo cuando X se hace muy grande, los costos empiezan a aumentar a medida que la capacidad de las unidades de producción existente llegan a gastarse, y empiezan a ser necesario invertir en una nueva planta o maquinaria o pagar horas extras a los trabajadores, etc



$$C'(x) = 0.003x^2 - x + 50$$

$$C'(0) = 0.003(0)^2 - (0) + 50 = 50$$

$$C'(20) = 0.003(20)^2 - (20) + 50 = 31.2$$

$$C'(40) = 0.003(40)^2 - (40) + 50 = 14.08$$

$$C'(60) = 0.003(60)^2 - (60) + 50 = 0.8$$

Figura 11. Gráfico del costo.

Ingreso y utilidad Marginales

Ahora consideremos los ingresos derivados de la ventas de los productos o servicios de una empresa.

Ingreso marginal $= R'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta R}{\Delta x}$

AR = Nuevo ingreso - Ingreso marginal

AR = R (x + Δx) – R (x)

Ingreso promedio es el ingreso por articulo adicional vendido, se obtiene

$$\frac{\Delta R}{\Delta X} = \frac{\textit{(Artículo adicional vendido)}}{\textit{(Artículo adicionales)}}$$

Ejemplo # 3 (Ingreso marginal)

Si la función ingreso está dada por

Determinar el ingreso marginal cuando x = 100

Solución. Entonces derivamos

$$R'(x) = \frac{d}{dx} = \; 20 - 0.01(2x) \qquad R\,(x) = \; 20x - 0.01\,x^{2}$$

$$R'(x) = \frac{d}{dx} = \; 20 - 0.02x$$

Entonces si x = 100 artículos, el ingreso marginal es:

$$R'(100) = \; 20 - 0.02\,(100)$$

$$R'(100) = \; 20 - 2 = 18$$

Asi que cuando se vende x = 100 articulos, cualquier incremento pequeño en las ventas provocan un aumento en los ingresos de $ 18 dólares por articulo.

Ejemplo # 4 (utilidad marginal)

La ecuación de demanda de ciento artículos es p + 0.1 x = 100

Y la función del costo es C (x) = 4000 + 30x

Calcule la utilidad marginal cuando se produce y vende 200 unidades

Solución. La función de ingreso está dada por :

$$R(x) = xp \; = \; x\,(100 - 01x\,) = 100\,x \; - 0.1x^2$$

Por consiguiente, la utilidad ganada por la producción y venta de x artículos está dada por:

$$P(x) = R\,(x) - C\,(x)$$

$$P(x) = (100\,x - 0.1x^2) - (\,4000 + 30x\,)$$

$$P(x) = 100x - 0.1x^2 - 4000 - 30x$$

$$P(x) = 70x - 0.1x^2 - 4000$$

La utilidad marginal es la derivada P´(x) ya que P (x) es una combinación de potencias, usamos la fórmula de las potencia para calcular su derivada

$$P'(x) = \tfrac{d}{dx}(70x \; - 0.1x^2 \; - 4000$$

$$P'(x) = \tfrac{d}{dx}(70 \; - 0.1\;(2x)]$$

$$P'(x) = \tfrac{d}{dx}(70 \; - 0.2x$$

Si x = 200 unidades, obtenemos

$P'(x) = 70 - 0.2\ (200)$

$P'(x) = 70 - 40$

$P'(x) = 30$

Asi pues, cuando se produce 200 articulos, la utilidad marginal, esto es la utilidad extra por articulo adicional cuando la producción se incrementa en una pequeña cantidad de $ 30 dólares

Luego, cuando x = 400 unds, la utilidad marginales es :

$P'(400) = 70 - 0.2\ x$

$P'(400) = 70 - 0.2\ (400\ )$

$P'\ (400) = 70\ - 80$

$P'\ (400) = -10$

En consecuencia, si se producen 400 unidades, un pequeño incremento en la producción da como resultado una pérdida (esto es, una utilidad negativa) de $ 10 por unidad adicional.

Autoevaluación # 6

1. Hallar la derivada de las siguientes funciones

$Y = \sqrt{6x^2 - 2x + 3}$

$Y = 6x^4 + 3x^3 - 5x + 2$

$S = (9x^2 - 5x)^3$

$Y = 7b\sqrt{10x^2 - 3x + 1}$

$Y = 9\sqrt[3]{(15x^2 + 3)^2}$

$$Y = \frac{\sqrt{8x^2+3}}{7}$$

$$Y = \frac{(9x^2-3)^2}{10}$$

$$Y = \sqrt{\frac{5-3}{5+3x}}$$

$$Y = \frac{15x^2+1}{\sqrt{6x+1}}$$

$$Y = 7x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 10x + 6$$

$$Y = 10x^3 - 20x^2 + 5x - 10$$

$$Y = 4ax^2 - 3bx + 5$$

$$Y = (4at^3 + 2bt^2 - 5t + 2)$$

$$Y = (\frac{6}{x^2} - \frac{4}{x})$$

$$Y = (6x^{\frac{5}{3}} - 6x^2)$$

$$Y = \sqrt{6x^2 - 3x}$$

$$Y = \sqrt[3]{(7x^2 - 2x + 2)^5}$$

$$F(x) = \sqrt[5]{10x^2 - 3x}$$

$$Y = (4a - \frac{3b}{x^2})$$

$$Y = 6a\sqrt{3x^2 - 2}$$

$$Y = 7b(3x^2 - 2)^2$$

$$Y = 8\sqrt[4]{(2x^2 - 3)^3}$$

$$Y = \sqrt{5x^2 + 2}(3x^2 + 1)$$

$$Y = (6x - 2)\sqrt{15x + 2}$$

$$Y = (4x^2 + 2)^2(5x - 1)$$

$$Y = \sqrt{\frac{6-2x}{6+2x}}$$

$$Y = \frac{\sqrt{5x^2+2}}{\sqrt{7x-1}}$$

$$Y = \frac{(10x-2)^2}{(6x+5)}$$

$$Y = \frac{\sqrt{9x^2+5}}{7}$$

$$Y = \frac{\sqrt{16t^2-20t+3}}{15a}$$

$$Y = \frac{\sqrt{(8x^2+5)^2}}{10}$$

Problemas propuestos

Ejemplo # 1

El fabricante de ciento artículos artículos descubre que con la finalidad de producir x de estos artículos a la semana, el costo total en dólares está dado por

$$C = 500 + 0.05\,x^2$$

Hallar:

a. Costo (C) si se producen x = 300 articulos semanal

b. Costo promedio

c. Si el fabricante cambia la tasa de producción de (300 + Δx) unidades/semanal, hallar el cosot extra

Ejemplo # 2

Dado la función costo:

$C(x) = 0.00\, x^3 - 0.09x^2 + 30x + 100$

Determine:

a. Costo marginal cuando $x = 60$; $x = 120$

b. Grafique

Ejemplo # 3

Ingreso marginal si la función ingreso está dada por

$R(x) = 30x - 0.01\, x^2$

Detemine el ingreso marginal cuando x = 150 unds

Ejemplo # 4

Utilidad marginal

La ecuación de la demanda de ciento articulo es $P + 0.1x = 200$ y la función costo es

$C(x) = 3000 + 25x$

Calcule la utilidad marginal cuando se producen y venden 250 unidades

2.3. Derivadas Sucesivas

También llamadas de orden superior, consiste en lograr encontrar la primera, segunda, tercera y n derivada de una función.

Ejercicios resueltos: Derivadas sucesivas

Hallar $\frac{dy}{dx}$; $\frac{d^2y}{dx^2}$ **para las siguientes funciones:**

1. $Y = x^2 - 5x + 2$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 5$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2$$

2. $Y = \sqrt{3x^2 - 5}$ $\quad Y = (3x^2 - 5)^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{d}{dx}(V^n) = nv^{n-n}\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(3x^2-5)^{\frac{1}{2}-1}\ \frac{d}{dx}(3x^2-5)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(3x^2-5)^{-\frac{1}{2}}(6x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x}{(3x^2-5)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2-5}}$$

Para hallar la segunda derivada, procedemos a calcular:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x}{(3x^2-5)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(3x^2-5)^{\frac{1}{2}}\ \frac{d}{dx}(3x) - 3x\frac{d}{dx}(3x^2-5)^{\frac{1}{2}}}{\left[(3x^2-5)^{\frac{1}{2}}\right]^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(3x^2-5)^{\frac{1}{2}}(3) - 3x\left[\frac{1}{2}(3x^2-5)^{\frac{1}{2}}(6x)\right]}{(3x^2-5)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3(3x^2-5)^{\frac{1}{2}} - \frac{9x^2}{(3x^2-5)^{\frac{1}{2}}}}{(3x^2-5)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{3(3x^2-5)-9x^2}{(3x^2-5)^{\frac{1}{2}}}}{(3x^2-5)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{9x^2 - 15 - 9x^2}{(3x^2-5)^{\frac{1}{2}}}}{(3x^2-5)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-15}{(3x^2-5)^{\frac{3}{2}}}$$

3. $S = (6t^2 - 2)^2$

$$S = (6t^2)^2 - 2(6t^2)(2) + (2)^2$$

$$S = 36t^4 - 24t^2 + 4$$

$$\frac{ds}{dt} = 144t^3 - 48t + 0$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 432t^2 - 48$$

4. $Y = (6x^2 - 5)(4x - 1)$

$$Y = 24x^3 - 6x^2 - 20x + 5$$

$$\frac{dy}{dx} = 72x^2 - 12x - 20$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 144x - 12$$

5. $Y = (2x - 2)^3$

$$Y = (2x)^3 - 3(2x)^2(2) + 3(2x)(2)^2 - (2)^3$$

$$Y = 8x^3 - 24x^2 + 24x - 8$$

$$\frac{dy}{dx} = 24x^2 - 48x + 24$$

$$\frac{d^2y}{dx} = 48x - 48$$

6. $F(x) = 6x^2 - 24x + 12$

$F`(x) = 12x - 24$

$F``(x) = 12$

7. $F(x) = 12x^4 - 5x^3 + 2x^2$

$F``(x) = 48x^3 - \ 15x^2 + 4x$

$F``(x) = 144x^2 - 30x + 4$

8. $Y = 6x^3 - 2x^2 + 3$

$Y' = 18x^2 - 4x$

$y`` = 36x - 4$

9. $Y = \frac{6x^2}{3x-1}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{dv}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x-1)\frac{d}{dx}(6x^2) - 6x^2\frac{d}{dx}(3x-1)}{(3x-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x-1)(12x) - 6x^2(3)}{(3x-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{36x^2 - 12x - 18x^2}{(3x-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{18x^2 - 12x}{(3x-1)^2}$$

$$\frac{d}{du}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(3x-1)^2\frac{d}{dx}(18x^2 - 12x) - (18x^2 - 12x)\frac{d}{dx}(3x-1)^2}{((3x-1)^2)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(3x-1)^2(36x-12)-(18x^2-12x)2(3x-1)\frac{d}{dx}(3x-1)}{(3x-1)^4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(3x-1)^2(36x-12)-(18x^2-12x)2(3x-1)(3)}{(3x-1)^4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(3x-1)^2[(12(3x-1))]-6(18x^2-12x)(3x-1)}{(3x-1)^4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{12(3x-1)^3-6(3x-1)(18x^2-12x)}{(3x-1)^4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{6(3x-1)[2(3x-1)^2-(18x^2-12x)]}{(3x-1)^4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(18x-6)[2(3x)^2-2(3x)(1)+1^2]-(18x^2-12x)}{(3x-1)^4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(18x-6)[6x^2-12x+2-18x^2+12x]}{(3x-1)^4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(18x-6(-12x^2+2)}{(3x-1)^4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-21x^3+36x+72x^2-12)}{(3x-1)^4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-216x^2+72x^2+36x-12)}{(3x-1)^4}$$

Autoevaluación # 7

1. Hallar $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$ **de:**

1. $Y = x^4-5x^3+2x^2-5$

2. $Y = 5x^3+6x^2-3x-2$

3. $F(x) = \sqrt{6x^2-5}$

4. $Y = (7x^2 + 3)^2$

5. $S = (4t - 2)^3$

6. $Y = (3x^2 + 2)(6x - 1)$

7. $Y = \sqrt{5x^2 - 2}$

8. $Y = x^3 + 5x^2 - 3$

9. $Y = \frac{3x+2}{5x^2}$

10. $Y = \sqrt{8x^2 + 2}\,(5x - 1)$

2. Aplicando las fórmulas, hallar la primera y segunda derivada de:

1. $Y = 6x^2 - 5x + 3$

2. $Y = x^3 - 6x^2 + 8x - 5$

3. $Y = \frac{(8x-1)}{(5x^2-25)}$

4. $Y = \sqrt{6x - 1}\,(3x)$

5. $Y = (4x^2 + 3)^2$

6. $Y = (8x - 2)(7x - 2)^2$

7. $Y = \sqrt{8x^2 - 3}$

8. $Y = 9x^4 - 27x^3 + 2x - 2$

2.4 Aplicación de la derivada

La derivada sirve para encontrar la pendiente de una recta tangente a una curva, se aplica en el campo de la economía y ciencias administrativas (para hallar el punto de equilibrio de la oferta y la demanda) y en geometría analítica e ingeniería industrial (para hallar la pendiente de la tangente a una curva).

2.4.1 Geométrica Analítica

En geometría analítica la derivada se la calcula de la siguiente manera:

Dada la función $Y = x^2 - 6x + 8$

a. Dibujar la curva de la función

b. Hallar la primera derivada de la función

c. Calcular la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P(5,3).

a. $Y = x^2 - 6x + 8$

.

X	Y
0	8
1	3
2	0
3	-1
-1	15
-2	24
4	0
5	3

$$Y = (0)^2 - 6(0) + 8 = 8$$

$$Y = (1)^2 - 6(1) + 8 = 3$$

$$Y = (2)^2 - 6(2) + 8 = 0$$

$$Y = (3)^2 - 6(3) + 8 = -1$$

$$Y = (-1)^2 - 6(-1) + 8 = 15$$

$$Y = (-2)^2 - 6(-2) + 8 = 24$$

$$Y = (4)^2 - 6(4) + 8 = 0$$

$$Y = (5)^2 - 6(5) + 8 = 3$$

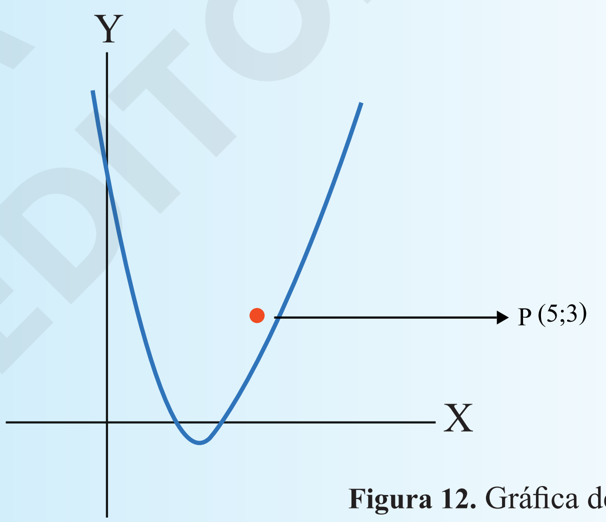


Figura 12. Gráfica de la función.

b. $Y = x^2 - 6x + 8$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 6$$

c. Como el punto donde la curva hace tangencia con la recta es P(5,3), tenemos que X=5, entonces reemplazamos, $m = \frac{dy}{dx} = 2(5) - 6 = 4$

d. Para calcular la pendiente o inclinación de cualquier recta se utiliza la fórmula $Tg\theta = m$, como $m = 4$, tenemos $Tg\theta = 4$, ahora bien:

$$\theta = YnvTg\ (4)$$

$$\theta = 75^{0}57`50``$$

Dada la función $Y = x^2 - 5x + 5$

a. Dibujar la curva de la función.

b. Hallar la primera derivada de la función.

c. Calcular la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P(2;-1).

d. Determinar el valor del ángulo de inclinación de la tangente geométrica a la curva en el punto P(2;-1).

a. $Y = x^2 - 5x + 5$

X	Y
0	5
1	1
2	-1
3	-1
4	1
5	5
-1	11

$$Y = (1)^2 - 5(1) + 5 = 1$$

$$Y = (2)^2 - 5(2) + 5 = -1$$

$$Y = (3)^2 - 5(3) + 5 = -1$$

$$Y = (4)^2 - 5(4) + 5 = 1$$

$$Y = (5)^2 - 5\ (5) + 5 = 5$$

$$Y = (-1)^2 - 5(-1) + 5 = 11$$

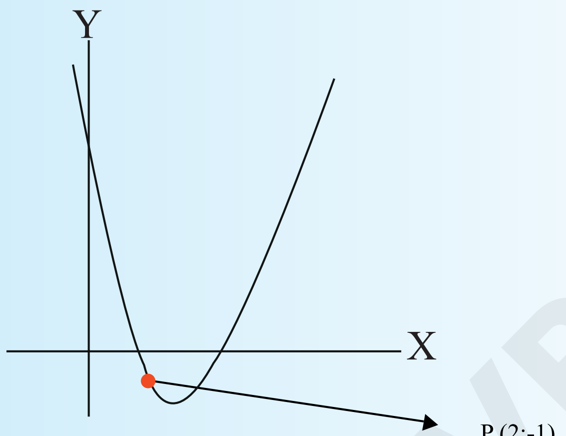


Figura 13. Gráfica de la función.

b. $Y = x^2 - 5x + 5$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 5$$

c. Como el punto donde la curva hace tangencia con la recta es P(2;-1), tenemos que X=2; entonces reemplazamos $m = \frac{dy}{dx} = 2(2) - 5 = -1$

d. Para calcular la pendiente o inclinación de cualquier recta se utiliza la fórmula $Tg\theta = m$, como $m = -1$; tenemos:

$Tg\theta = -1$

$\theta = YnvTg\ (-1)$

$\theta = \ -45^0$

Segunda derivada

Ejemplos # 1

Análisis de la función de costo

C (x) = 0.001x^3 - 0.2 x^2 + 50x + 1500

El costo marginal es

C´(x) = 0.001 (3x^2) – 0.2 (2x) +50 (1)

$C'(x) = 0.003x^2 - 0.4x + 50$

La segunda derivada es

$C''(x) = 0.003\ (2x) - 0.4\ (1)$

$C''(x) = 0.006x - 0.4$

Si x = 300 ; el costo marginal es

$$C'\ (300) = 0.003\ (300)^2 - 0.4\ (300) + 50$$

$$C'\ (300) = 270 - 120 + 50$$

$$C'\ (300) = 200$$

$$C''\ (300) = 0.006\ (300) - 0.4$$

$$C''\ (300) = 1.08 - 0.4$$

$$C''\ (300) = 1.4$$

Podemos interpretar que este resultado signidica que cada unidad adicional producida conduce a un incremento de 1.4 en el costo marginal.

Ejemplos # 2

Analisís de la función de costo para la función de costo.

$$C\ (x) = 0.001^3 - 0.1x^2 + 10x + 50$$

El costo marginal es:

$$C'(x) = 0.001(3x^2) - 0.1(2x) + 10(1)$$

$$C'(x) = 0.003x^2 - 0.2x + 10$$

La segunda derivada es:

$$C''(x) = 0.003(2x - 0.2\ (1)$$

$$C''(x) = 0.006x - 0.2$$

Si x = 200, el costo marginales.

$$C'(200) = 0.003\ (200)^2 - 0.2\ (200) + 10$$

$$C'(200) = 120 - 40 + 10$$

$$C'(200) = 90$$

$$C''(200) = 0.006\ (200) - 0.2$$

$$C''(200) = 1.2 - 0.2 = 1$$

Podemos interpretar que este resultado significa que cada unidad adicional producida conduce a un incremento de 1 en el costo marginal.

Ejemplos # 3

Análisis de la función de costo para la función de costo

$$C'(x) = 0.001(3x^2) - 0.3(2x) + 30\ (1)$$

$$C'(x) = 0.003x^2 - 0.6x + 30$$

La seguda derivada es :

$$C''(x) = 0.003(2x) - 0.6\ (1)$$

$$C''(x) = 0.006x - 0.6$$

Si x = 100, el costo marginal es

$$C'(100) = 0.003\ (100)^2 - 0.6\ (100) + 30$$

$$C'(100) = 0.003(10000) - 60 + 30$$

$$C'(100) = 30 - 60 + 30 = 0$$

$$C''(100) = 0.006\ (100) - 0.6$$

$$C''(100) = 0.6 - 0.6 = 0$$

Podemos interpretar que este resultado significa que cada unidad adicional producida no conduce a un incremento

2.4.2 Obtener Puntos Máximos y Mínimos: Primer método.

De acuerdo a Granville, un valor de una función es máximo si es mayor que cualquiera de los valores que le anteceden o le siguen inmediatamente, mientras que un valor de una función es mínimo si es menor que uno cualquiera de los valores que le anteceden o lo siguen inmediatamente.

Por ejemplo, en la figura, es notorio que la función tiene un valor mínimo:

$BP(=Y=1)$ Cuando X=1 y un valor máximo $BP\ (=Y=4)$ cuando X=2.

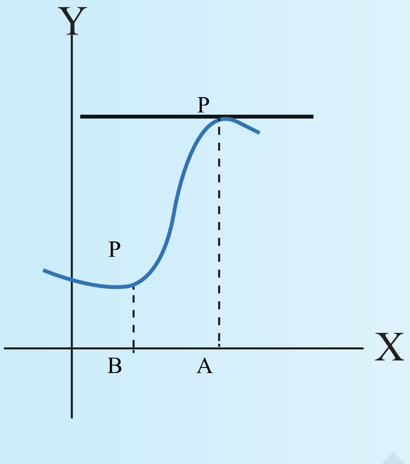


Figura 14. Gráfico lo que indica un punto máximo y un punto mínimo.

Si aplicamos la teoría de Granville, el primer método para hallar Puntos Máximos y Mínimos tendrá como procedimiento:

1. Se halla la primera derivada de la función.

2. Se iguala la primera derivada a cero, y se hallan las raíces reales de la ecuación resultante. Estas raíces son los valores críticos de la variable.

3. Se consideran los valores críticos uno por uno, y se calculan los signos de la primera derivada, en primer lugar para un valor un poco menor que el valor crítico, y después, para un valor un poco mayor que él. Si el signo de la derivada es primero (+) y después (-), la función tiene un máximo para este valor critico de la variable, en el caso contrario, es decir, si el signo de la derivada, es primero (-) y después (+), la función tiene un mínimo para este valor critico.

   Si el signo de la derivada no cambia, la función no tiene ni máximo ni mínimo para el valor crítico considerado.

Ejercicios resueltos: Puntos máximos y mínimos.

Calcular los valores máximos y mínimos de la función.

$Y=6x^3-3x^2-6x-2$

Primer paso

$$\frac{dy}{dx}=18x^2-6x-6$$

Segundo paso

$18x^2 - 6x - 6 = 0 \div 6$

$3x^2 - x - 1 = 0$

Aplicamos la fórmula general: A=3; B= -1; C= -1

$$X = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$X = \frac{-(-1) \mp \sqrt{(-1)^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)}$$

$$X = \frac{1 \mp \sqrt{1 + 12}}{6}$$

$$X = \frac{1 \mp \sqrt{13}}{6}$$

$$X = \frac{1 + \sqrt{13}}{6}$$

$$X_1 = \frac{1 + 3.60}{6}$$

$X_1 = 0.76$

$$X = \frac{1 - \sqrt{13}}{6}$$

$$X = \frac{1 - 3.60}{6}$$

$X_2 = -0.43$

Tercer paso

Cuando $X = 0.76$

$X = 0.5$

$18(0.5)^2 - 6(0.5) - 6 = -$

$X = 1$

$18(1)^2 - 6(1) - 6 = +$

Cuando $X = -0.43$

$X = -1$

$18(-1)^2 - 6(-1) - 6 = +$

$X = 0$

$18(0) - 6(0) - 6 = -$

Ahora tabulamos la función

X	Y	
0	-2	
0.76	-5.65	Mín
1	-5	
2	22	
-0.4	-0.5023	Máx
-1	-5	
-2	-50	

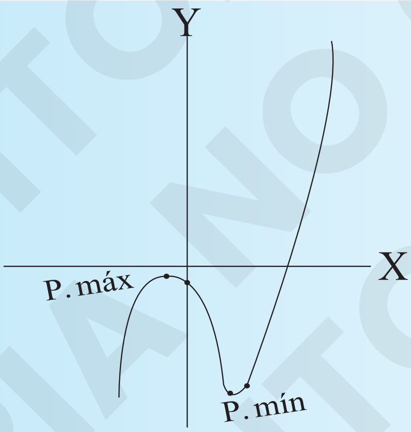


Figura 15. Punto de inflexión, el punto de inflexión es aquel que es el límite entre dos concavidades opuestas.

2.4.3 Puntos Máximos y Mínimos: Segundo método

Un segundo método para obtener los puntos máximos y mínimos de una función, bajo el procedimiento desarrollado por Granville, será:

1. Hallar la primera derivada de la función.

2. Igualar a cero la primera derivada y resolver la ecuación; las raíces reales son los valores críticos de la variable.

3. Hallar la segunda derivada.

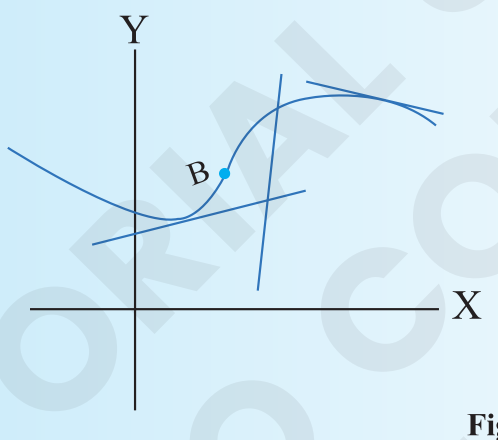
4. Sustituir en la segunda derivada, en lugar de la variable, cada uno de los valores críticos obtenidos. Si el resultado es negativo, la función tiene un máximo para este valor crítico; si el resultado es positivo, la función tiene un mínimo.

2.4.4. Puntos de Inflexión.

Un punto de inflexión en una curva es el que separa los arcos que tienen su concavidad en sentidos opuestos.

En la Figura 16, B es un punto de inflexión. Cuando el punto que describe una curva pasa por un punto de inflexión, la segunda derivada cambiará de signo en ese punto, y si es continua debe anularse. Luego, necesariamente, se verifica la siguiente igualdad:

En puntos de inflexión, F``(x) = 0



Punto de Inflexión (PI)

Figura 16. Gráfico de un punto máximo y un punto mínimo.

2.4.4.1 Regla para obtener los puntos de inflexión

Para obtener los puntos de inflexión de los arcos se debe realizar el siguiente procedimiento:

1. Se halla F``(x).

2. Se iguala a cero F``(x), se resuelve la ecuación resultante y se considera las raíces reales de la ecuación.

3. Se calcula F``(x), primero para valores de X un poco menores y después un poco mayores, para cada una de las raíces obtenidas en el segundo paso.

   Si F``(x) cambia de signo, tenemos un punto de inflexión.

   Cuando F``(x) es positiva, la curva es cóncava hacia arriba. Cuando F``(x) es negativa, la curva es cóncava hacia abajo.

Ejercicios resueltos: Puntos máximos, mínimos y de inflexión

Hallar los puntos máximos, mínimos y de inflexión de:

$$Y = 6x^3 + 3x^2 - 3x + 2$$

Primer paso

$$\frac{dy}{dx} = 18x^2 + 6X - 3$$

Segundo paso

$$18x^2 + 6x - 3 = 0 \div 3$$

$$6x^2 + 2x - 1 = 0$$

Aplicamos la fórmula general para calcular el valor de cada raíz real.

A = 6; B = 2; C = -1

$$X = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$X = \frac{-(2) \mp \sqrt{(2)^2 - 4(6)(-1)}}{2(6)}$$

$$X = \frac{-2 \mp \sqrt{4 + 24}}{12}$$

$$X = \frac{-2 \mp \sqrt{28}}{12}$$

$$X = \frac{-2 \mp 5.29}{12}$$

$$X_1 = \frac{-2 + 5.29}{12} = 0.27$$

$$X_2 = \frac{-2 - 5.29}{12} = -0.60$$

Tercer paso

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 36x + 6$$

Cuarto paso

$$36(0.27) + 6 = +(mín)$$

$$36(-0.60) + 6 = -(máx)$$

Puntos de inflexión

Primer paso

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 36x + 6$$

Segundo paso

$$36x + 6 = 0 \div 6$$

$$6x + 1 = 0$$

$$6x = -1$$

$$x = -\frac{1}{6}$$

Tercer paso

Cuando $X = -\frac{1}{6} = -0.16$

$$X = -0.5$$

$$36(-0.5) + 6 = -$$

$$X = 0$$

$$36(0) + 6 = +$$

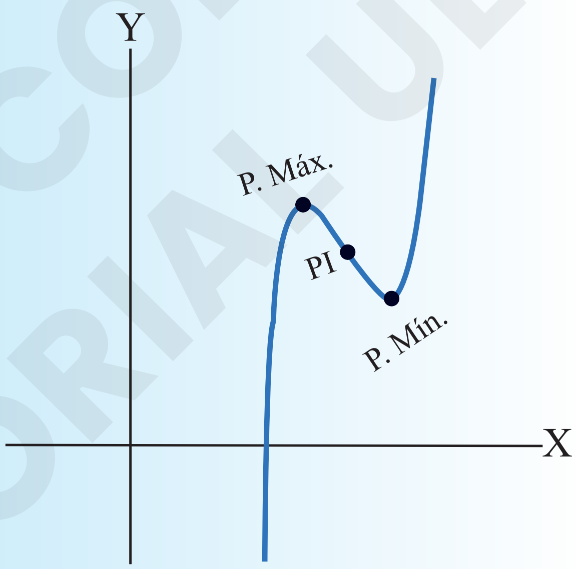


Figura 17. Punto de inflexión (PI)

Como hay cambio de signo, tenemos un punto de inflexión

Capítulo 3
Elasticidad

Resumen

Analizaremos la elasticidad de funciones y de arco, enfocaremos ejercicios y problemas de aplicación, además estudiaremos la elasticidad cruzada, las diferenciales con sus fórmulas y aplicaciones.

Objetivos de aprendizaje

- Determinar correctamente la elasticidad de arco.
- Establecer la elasticidad cruzada.
- Aplicar diferenciales en las funciones.

3.1 Elasticidad de funciones

La elasticidad se puede definir como la variación porcentual de una variable x en relación con una variable y. Si la variación porcentual de la variable dependiente y, es mayor que la variable x, se dice que la relación es inelástica, ya que la variable dependiente y, varía en mayor cantidad que la variable x; por el contrario, si la variación porcentual de la variable x, es mayor que la variable y, la relación es elástica.

La elasticidad demanda precio o simplemente elasticidad de la demanda mide la variación relativa o porcentual que experimenta la cantidad demandada.

Matemáticamente la elasticidad de la función se la define como:

La relación entre el incremento relativo de la función y el incremento relativo de su variable.

$$simbolos\ \frac{Ey}{EX}$$

De acuerdo a definición podemos inferir que:

$$\frac{Ey}{Ex} = \frac{\frac{\Delta Y}{y} \rightarrow}{\frac{\Delta x}{x} \rightarrow}$$

Incremento relativo de la función con respecto a Y

Incremento relativo de la variable X con respecto a X

$$\frac{Ey}{Ey} = \frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\frac{Ey}{Ey} = \frac{X}{Y} \cdot \frac{Dy}{Dx}$$ Fórmula de la elasticidad de la función

$$\frac{Ey}{Ex} = \frac{lim}{\Delta x \to 0} \frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\frac{Ey}{Ex} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$ Fórmula de la elasticidad de las funciones

Primer paso: Multiplicar extremos con extremos medios con medios.

Segundo paso: Cuando el límite de X ⟶ 0, el incremento Y ⟶X se convierte en dy y dx respectivamente, es decir se origina la primera derivada.

Ejercicios resueltos: Elasticidad de funciones

1. Cuando el precio unitario de venta de un producto fue $45,00, se vendieron 60 unidades. Cuando el precio subió a $52,00 la demanda fue de 52 unidades.

Determinar:

a. La función demanda.

b. La expresión algebraica que permita calcular la elasticidad de la función.

c. El valor de la elasticidad de la función para $x = 52$

d. La variación porcentual del precio unitario de venta para lograr incrementar la demanda de 52 unidades en un 6%.

Como observamos, si el precio sube la demanda disminuye, entonces ubicamos en el plano los puntos (P1 Y P2) para graficar la función de demanda.

Luego encontramos la pendiente de esta función, con la pendiente y uno de los puntos por donde pasa la recta demanda, hallamos la ecuación de la función demanda.

Mas adelante con el valor X=52, lo remplazamos y hallamos la elasticidad de la función y la variación porcentual del precio unitario.

Datos

$x = 60 ; y = 45$

$p:(60;45)$

$X = 52; y = 52$

$p(52{,}52)$

B.-$\frac{EY}{EX} =?$ C. $x = 52$ $\frac{EY}{EX} =?$ D. $\Delta\%y =?$

$$m = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$$

$$m = \frac{45 - 52}{60 - 52} = -\frac{7}{8}$$

$$y - y1 = m(x - x1)$$

$$y - 45 = -\frac{7}{8}(x - 60)$$

$$8y - 360 = -7(x - 60)$$

$$8y - 360 = -7x + 420$$

$$8y = -7x + 420 + 360$$

$$y = -\frac{7}{8}x + \frac{780}{8}$$

$$y = -\frac{7}{8}x + 97.5$$

B. $\frac{Ey}{EX} = \frac{X}{Y} \cdot \frac{dy}{dx}$

$$\frac{Ey}{Ex} = \frac{x}{-\frac{7}{8}x + 97.5}\left(-\frac{7}{8}\right)$$

$$\frac{EY}{EX} = \frac{-\frac{7}{8X}}{\frac{-7}{8}X + 97.5}$$

$cuando = x = 52$

$$\frac{Ey}{Ex} = \frac{-\frac{7}{8}}{-\frac{7}{8}} \frac{(52)}{(52) + 97.5}$$

$$\frac{Ey}{Ex} = \frac{-45.5}{-45.5 + 97.5}$$

$$\frac{Ey}{Ex} = \frac{-45.5}{52}$$

$$\frac{Ey}{Ex} = -0.875$$

$$\Delta\%y = \frac{Ey}{Ex}(\Delta\%x)$$

$$\Delta\%y = -5.25\%$$

2. Cuando el precio unitario de venta de un producto zapatos fue de $65.50 se vendieron 42 unidades. Cuando el precio subió a $69.90 la demanda fue de 39 unidades.

Determinar:

a. La función demanda.

b. La expresión algebraica que permita calcular la elasticidad de la función.

c. El valor de la elasticidad de la función para x =39 unidades.

d. La variación porcentual del precio unitario de venta para lograr incrementar la demanda de 39 unidades en un 2%.

Datos:

a) x=42 ; y= 65.50 P1(42;65.50)

x=39; y= 69.90 P2(39; 69.90)

b) $\frac{Ey}{Ex} = ?$

c) x= 39

$\frac{Ey}{Ex} = ?$

d) $\Delta\%y = ?$

y

P2 (39 ; 69.90)

P1(42 ; 65.50)

a) $m = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$

$m = \frac{69.90 - 65.50}{39 - 42}$

$m = \frac{4.4}{-3} = -1.4666$

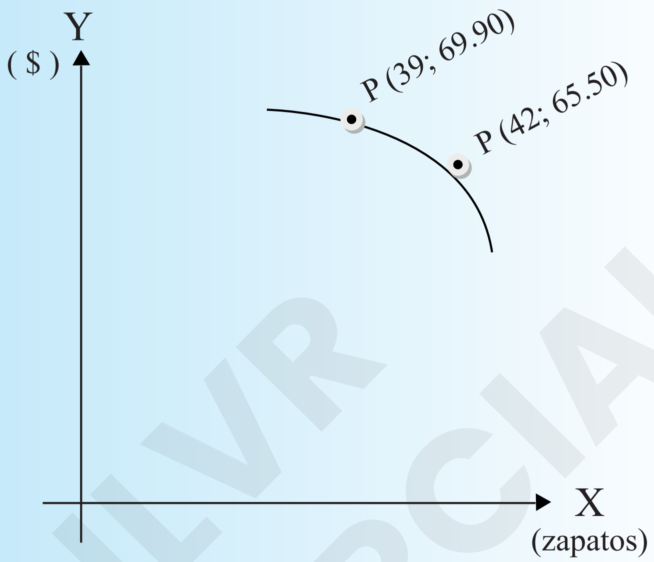


Figura 18. Gráfico de elasticidad de función.

$y\text{-}y1=m(x\text{-}x1)$

y - 65.50=-1.4666$(x$ - 42$)$

y - 65.50=-1.466x + 61.5972

y=-1.4666x+61.5972 + 65.50

y=-1.466x+127.0972

$\frac{Ey}{Ey} = ?$

$\frac{Ey}{Ey} = \frac{X}{Y} \cdot \frac{dy}{dx}$

$\frac{EY}{EX} = \frac{x}{-133x + 113.1} (-1{,}4666)$

$\frac{EY}{EX} = \frac{-1{,}4666x}{-1{,}4666x + 127{,}0972}$

c) Cuando x= 39

$\frac{EY}{EX} = \frac{-1{,}4666}{-1{,}4666 + 127{,}0972}$

$\frac{EY}{EX} = \frac{-57{,}1974}{-57.1974 + 127.0972}$

$$\frac{EY}{EX} = \frac{-57,1974}{69.8998}$$

$$\frac{EY}{EX} = -0.8182$$

$$d)\Delta\%\, y = \frac{Ey}{Ex}(\Delta\% x)$$

$$\Delta\%\, y = (-0.8182)\ (2)$$

$$\Delta\%\, y = -1,6364$$

3.2 Elasticidad de arco

La elasticidad de arco es una magnitud que refleja la elasticidad-precio de la demanda entre dos puntos, como referencia las condiciones matemáticas a considerar son las siguientes:

1. Supongamos una función $y = f(x)$
2. En el plano cartesiano supongamos dibujada la línea de la función.
3. En la curva de la función consideraremos los puntos $P1(x1; y1)$ y $P2(x2; y2)$
4. El segmento de la línea dibujada comprendida entre los puntos P1 y P2, es un arco.
5. Para obtener la fórmula que permite calcular la elasticidad del arco, será suficiente promediar las elasticidades de los puntos que limitan el arco.

$P1(x1; y1)$

$$\frac{Ey}{Ex} = \frac{x1}{y1} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Para el $P2(x2; y2)$

$$\frac{Ey}{Ex} = \frac{x2}{y2} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Promediando nos queda:

$$\frac{Ey}{Ex}\frac{\frac{x1+x2}{2}}{\frac{y1+y2}{2}}\cdot\frac{\frac{\Delta y+\Delta y}{2}}{\frac{\Delta x+\Delta x}{2}}$$

$$\frac{Ey}{Ex}=\frac{x1+x2}{y1+y2}\cdot\frac{2\Delta y}{2\Delta x}$$

$$\frac{Ey}{Ex}=\frac{x1+x2}{y1+y2}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}$$ $\longrightarrow$ Fórmula para la elasticidad de arco

Ejercicios resueltos: Elasticidad de arco.

1. **Cuando el salario del obrero era de \$380,00 al mes, podría consumir 7 libras de carne; cuando el salario aumentó en \$470,00 al mes, entonces el obrero pudo consumir 10 libras de carne.**

Determinar:

1. La elasticidad de la función C= f (S)
2. La variación porcentual del consumo de carne, si el obrero por su desempeño recibe un incremento en su salario del 6 %

consumo C= f (S)

$P1(380;7)\ P2(470;10)$

$$1.\frac{Ec}{Es}=\frac{S1+S2}{C1+C2}\cdot\frac{\Delta C}{\Delta S}$$

$$\frac{Ec}{Es}=\frac{380+470}{7+10}\cdot\frac{3}{90}$$

$$\frac{Ec}{Es}=\frac{850}{17}\cdot\frac{1}{30}=\frac{850}{510}=1.6666$$

$$2.\ \Delta\%C=\frac{EC}{ES}(\Delta\%S)$$

$$\Delta\%C=1.666(6\%)$$

$$\Delta\%C=9.99\%$$

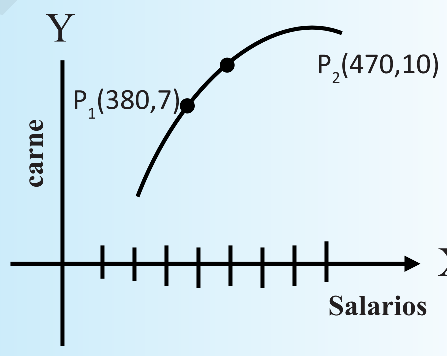


Figura 19. Gráfico de elasticidad de arco.

2. **El salario del obrero era de $170,00 semanales, y consumía 3 litros de leche por semana; cuando el salario aumentó a $200,00 semanales, entonces pudo consumir 5 litros de leche semanales.**

Determinar:

1. La elasticidad de la función $C = f(S)$
2. La variación porcentual del consumo de leche, si el obrero por su desempeño recibe un incremento en el salario del 2.5%

Consumo

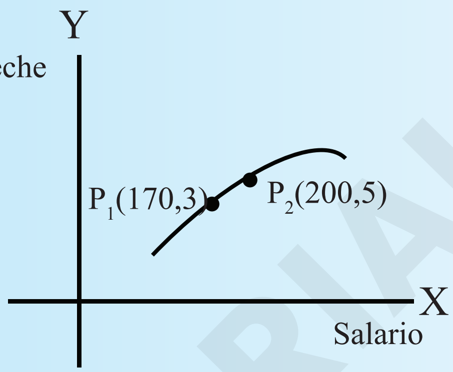


Figura 20. Gráfico de elasticidad de arco 1.

C=f(s)

$P2(200;5)$

$P1(170;3)$

Salario

1. $\frac{Ec}{Es} = \frac{S1+S2}{C1+C2} \cdot \frac{\Delta C}{\Delta S}$

$$\frac{Ec}{Es} = \frac{170+200}{3+5} \cdot \frac{2}{30}$$

$$\frac{Ec}{Es} = \frac{370}{8} \cdot \frac{1}{15}$$

$$\frac{Ec}{Es} = \frac{370}{120} = 3.08$$

2. $\Delta\%C = \frac{EC}{ES}(\Delta\%S)$

$\Delta\%C = 3.08(2.5\%)$

$\Delta\%C = 7.7\%$

Autoevaluación # 8

Resolver los siguientes problemas relacionados con el cálculo de la elasticidad del arco.

1. Cuando el salario era de $320,00 al mes, el obrero podría consumir 12 litros de leche; cuando el salario aumentó en $370,00 al mes; entonces el obrero pudo consumir 14 litros de leche al mes.

Determinar:

a. La elasticidad de la función *C= F(S)*

b. La variación porcentual del consumo de leche, si el obrero por su desempeño recibe un aumento en el salario del 3%.

2. Si el trabajador recibe un salario semanal de $155,00 podría consumir 3 libras de carne semanal; cuando el salario aumentó en $185,00 semanales, pudo consumir 8 libras de carne.

Determinar:

a. La elasticidad de la función *C= F(S)*

b. La variación porcentual del consumo de carne, si el empleado por su desempeño recibe un incremento del salario en un 2%.

3.3 Elasticidad cruzada

En el mercado encontramos productos que se comercializan cruzados. Esta elasticidad cruzada de la demanda informa el grado de influencia que tiene un producto en la demanda de otro producto y las variaciones en el precio del otro producto diferente pero relacionado.

Si el resultado de la ecuación es mayor a cero, estamos hablando de un bien sustituto, si es menor a cero, estamos hablando de un bien complementario.

3.3.1 Bienes sustitutos

Son aquellos bienes que compiten en el mercado, es decir, un bien es competencia del otro y en consecuencia, si el precio de uno de los bienes aumenta, su demanda disminuirá y, esto hará que la demanda del otro bien (sustituto) aumente.

Por ejemplo: La mantequilla y la margarina, son bienes sustitutos, pues el precio de venta de uno de ellos influye en la demanda del otro.

En el ejemplo grafico, uno de ellos representa la mantequilla y el otro la margarina, como son bienes sustitutos, la elasticidad es positiva, por esta razón las flechas van hacia arriba.

Cuando los productos son sustitutos la elasticidad es positiva (+)

3.3.2 Bienes complementarios

Son aquellos bienes que tienden a utilizarse en conjunto, por lo tanto, si baja la demanda de uno (porque aumenta su precio) esto afecta la demanda del otro bien.

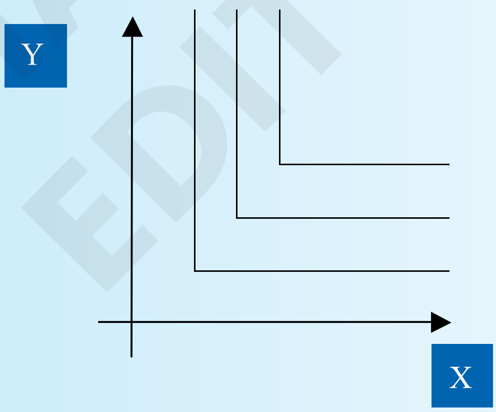
Por ejemplo: Las llantas y los automotores son productos complementarios, pues el precio de venta de los autos influye en la demanda de llantas.

Para los productos complementarios la elasticidad resulta negativa (-)

3.3.3 Bienes complementarios perfectos

Dos bienes son complementarios perfectos cuando ambos tienen que ser usados o consumidos de manera simultánea. El ejemplo más típico que suele presentarse es el de los zapatos del pie izquierdo y zapatos del pie derecho. Las características más importantes de estos bienes es que el usuario prefiere consumirlos en proporciones fijas.

Técnicamente los bienes complementarios perfectos se reconocen por sus curvas de indiferencia, formas de L o formas de un ángulo recto.



Las Curvas de indiferencias, cuando son bienes complementarios perfectos, tienen ángulo recto.

Figura 21.- Bienes complementarios perfectos

Ningún bien es complementario perfecto de otro. Lo más normal es que las curvas de indiferencia estén curvadas hacia delante.

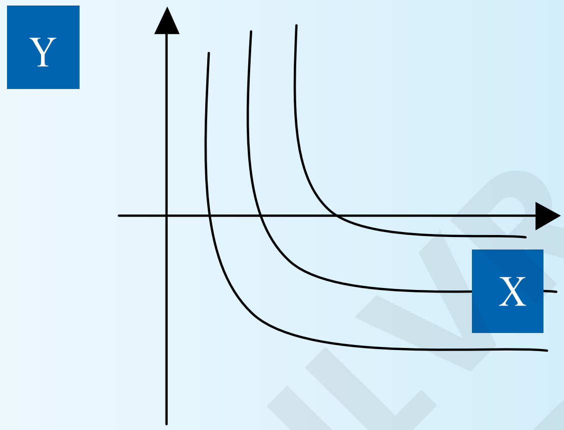


Figura 22.-Bienes complementarios perfectos

Ejercicios resueltos: Elasticidad cruzada.

Cuando el precio del artículo A fue de $55,00 cada uno, se vendieron 38 unidades del artículo B; cuando el precio del artículo A subió a $62,00 la demanda del artículo B fue de 47 unidades.

Determinar:

a. La elasticidad cruzada de la demanda de B con respecto al precio de A.

b. ¿Son los productos A y B sustitutos o complementarios?

c. ¿Cuál es la variación porcentual de la demanda de B, para cuando el precio de A, sube el 3% sobre los $62,00 que se cobraban?

dólares

$$\frac{EDB}{EPA} = \frac{PA + PA2}{DB1 + DB2} \cdot \frac{\Delta DB}{\Delta PA}$$

$$\frac{EDB}{EPA} = \frac{55 + 62}{38 + 47} \cdot \frac{9}{7}$$

$$\frac{EDB}{EPA} = \frac{117}{85} \cdot \frac{9}{7}$$

$$\frac{EDB}{EPA} = \frac{1053}{595}$$

$$\frac{EDB}{EPA} = 1.76$$

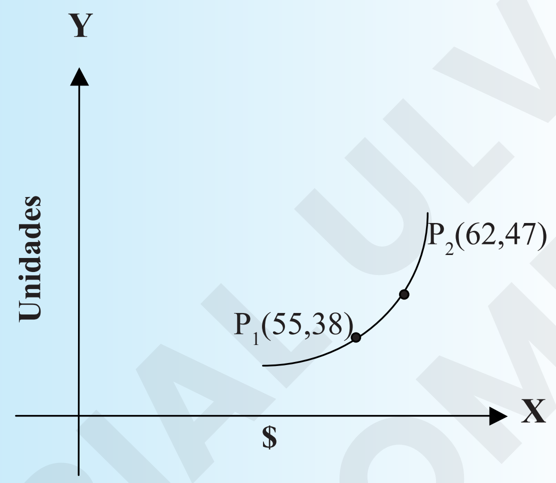


Figura 23. Elasticidad cruzada.

a. Los productos de A y B son sustitutos porque la elasticidad resulta positiva (+)

b. $\Delta\% \, DB = \frac{EDB}{EPA} (\, \Delta\% \, PA)$

$\Delta\% \, DB = \; 1.76(\, 3\%)$

$\Delta\% \, DB = 5.28\%$

Autoevaluación # 9

Resolver los siguientes problemas relacionados con elasticidad cruzada.

1. Cuando el precio del artículo A fue de $45.00 cada uno, se vendieron 36 unidades del artículo B; cuando el precio del artículo A subió a $52.00, la demanda del artículo B fue de 11 unidades.

Determinar:

a. La elasticidad cruzada de la demanda de B con respecto al precio de A.

b. ¿Son los productos A y B sustitutos o complementarios?

c. ¿Cuál es la variación porcentual de la demanda del artículo B, para cuando el precio de A, sube en 1.5 % sobre los $52.00 que cobraba?

2. El precio unitario de venta del producto X es $19.00 cuando la demanda del producto Y es 150 unidades; si el producto X, aumenta su precio unitario a $22.00 la demanda del producto Y cruzada en el mercado se reduce 142 unidades.

Determinar:

1. La elasticidad cruzada de la demanda de X con respecto al precio de Y.
2. La variación porcentual de la demanda de X cuando el precio de Y aumenta en 3%

3.4 Diferenciales: Definiciones

Si f´(x) es la derivada de f(x) para un valor particular de X, y ΔX es un incremento de X, arbitrariamente elegido, la diferencial de f´(x), que se representa por el símbolo df(x), se define por la igualdad:

$$df'(x) = f'(x)\Delta X = \frac{dy}{dx}\Delta X \ (A)$$

Si f(X) = X, entonces f´(X) =1, entonces (A) se reduce dx = Δx

Así, cuando X es la variable independiente, la diferencial de X(=dx) es idéntica a ΔX. Por tanto, si Y=f(x), (A) puede, en general, escribirse en la forma:

$$dy = f'(x)dx = \frac{dy}{dx}\ Dx$$

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta X$$

Teorema: *La diferencial de una función es igual al producto de su derivada por la diferencial de la variable independiente.*

Diferencial de una función

Son valores extremadamente pequenas de una función matemática si la función es y = f (x), el diferencial se lo simboliza dy.

Para obtener la formula que permite el diferencial,hagamos el siguiente análisis grafico.

$m = \frac{dy}{dx}$

$m = \text{tg}\theta = \frac{dy}{\Delta x} = \frac{dy}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$

$dy = (\frac{dy}{dx}) = \Delta x = \text{formula}$

La interpretación geométrica de lo que se aprecia en la Fig. (8) construyamos la curva $Y = f(x)$. Donde f´(x) sea el valor de la derivada en P tomamos dx=PQ.

Entonces, $dy = f'(x)dx = Tg\ t\ PQ$ (1)

$= \frac{QT}{PQ} x\ PQ = QT$ (2)

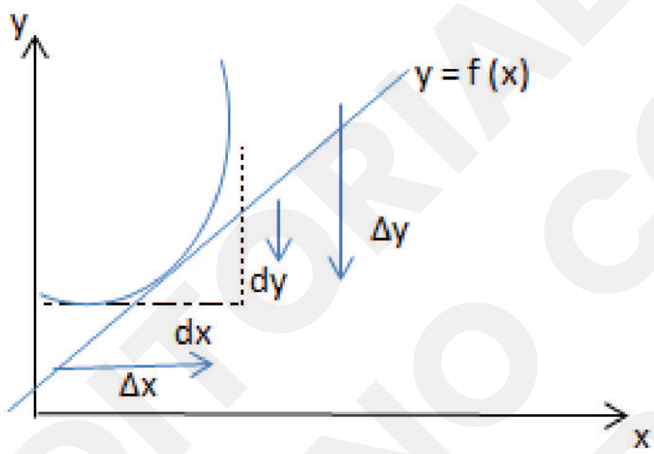


Figura 24. Gráfico de la diferencial

Luego dy, o sea, df(x), es el incremento (=QT) de la ordenada de la tangente, correspondiente a dx.

Esto da la siguiente interpretación de la derivada como función, si se representa por dx un incremento arbitrariamente elegido de la variable independiente X para un punto.

P(x;y) en la curva Y= f(x), entonces en la derivada

$\frac{dy}{dx} = f'(x) = T\ y\ T$

dy representa el incremento correspondiente de la ordenada de la Tangente de P

Tangente en P

Debemos advertir, especialmente que la diferencial (= dy) y el incremento (=Δy) no son, en general, iguales. En efecto, en la figura 8, dy= QT, pero Δy = QP' *

Siguiendo con la teoría Granville y usando diferenciales, hallar un valor aproximado para cada una de las siguientes expresiones.

Ejercicios resueltos

1.- $Y = \sqrt{16.08}$

Función: $y = \sqrt{x}$

$$y = x^{\frac{1}{2}}$$

Donde x=16

$\Delta x = 0.08$

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right).\Delta x$$

$$dy = \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right).\Delta x$$

$$dy = \left(\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}\right).\Delta x$$

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x$$

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{16}}.(0.08)$$

$$dy = \frac{1}{2}.\frac{1}{4}(0.08)$$

$$dy = 0.01$$

$$y = \sqrt{16.08} = 4.0199 \cong 4.01$$

Es decir:

$$\sqrt{16} + 0.01$$

$4 + 0.01 = 4.01$

2. $y = \sqrt{63}$ $\qquad$ $y = \sqrt{x}$

$x = 64$ $\qquad$ $y = x^{\frac{1}{2}}$

$\Delta x = -1 \quad \Delta y = ?$

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x$$

$$dy = \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)\Delta x$$

$$dy = \left(\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}\right)\Delta x$$

$$dy = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\Delta x$$

$$dy = \left(\frac{1}{2\sqrt{64}}\right)\Delta x$$

$$dy = \frac{1}{2x8}(-1)$$

$$dy = -\frac{1}{16} = -0.0625$$

$$y = \sqrt{63} = 8 - 0.0625 = 7.9375$$

Autoevaluación # 10

Usando diferenciales hallar un valor aproximado de cada una de las siguientes expresiones

1) $\sqrt{76}$

2) $\sqrt{104}$

3) $\sqrt[3]{6X-2}$

4) $\frac{1}{60}$

5) $\sqrt[4]{17}$

6) $\sqrt[4]{25}$

7) $\sqrt[3]{1020}$

8) $\sqrt[4]{140}$

3.5 Fórmulas varias para calcular diferenciales

Con base a la teoría de cálculo diferencial e integral desarrollado por Granville, la diferencial es igual a:

1. La diferencial de una constante es igual a cero.

   $d(c) = 0$

2. La diferencial de una variable es igual a:

   $d(x) = dx$

3. La diferencial de una suma y resta combinada de funciones es igual a la diferencial de cada una de ellos.

   $d(u + v - w) = du + dv - dw$.

4. La diferencial del producto de una constante por una función, es igual a la constante que multiplica a la diferencial de la función.

   $d(cv) = cdv$

5. La diferencial de un producto de dos funciones es igual a la primera función que multiplica al diferencial de la segunda, más la segunda función que multiplica al diferencial de la primera función.

   $d(uv) = u\,dv + v\,du$

6. El diferencial de una potencia de una función, es igual a n que multiplica a la función elevada a la potencia disminuida en 1, por el diferencial de la función.

   $d(v^n) = n\,v^{n-1}\,dv$

7. El diferencial de una potencia de una variable, es igual a n que multiplica a la variable elevada a una potencia disminuida en 1 por el diferencial de la variable.

   $d(x^n) = nx^{n-1}\,dx$

8. El diferencial de un cociente de una función dividida para una constante, es igual al diferencial de la función dividida para la constante.

$$d\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{du}{c}$$

9. El diferencial de un cociente de funciones, es igual al producto del denominador por el diferencial del numerador, menos el producto del numerador por el diferencial del denominador, todo dividido por el cuadrado del denominador.

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

Para hallar diferenciales, lo más fácil es hallar la derivada, y multiplicar el resultado por dx.

La operación de hallar diferenciales se llama diferenciación.

El diferencial del logaritmo natural de la función, es igual al diferencial de la función, sobre la función. $d(\ln v) = \frac{dv}{v}$

Ejercicios resueltos: Diferenciales

Hallar la diferencial de cada una de las siguientes funciones:

1. $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

$$y = (x^2 - 2x)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \quad d(v^n) = n\,v^{n-1}\,dv$$

$$dy = \frac{1}{2}(x^2 - 2x)^{\frac{1}{2}-1}\, d(x^2 - 2x)$$

$$dy = \frac{1}{2}(x^2 - 2x)^{-\frac{1}{2}}\,[\,d(x^2) - 2d(x)]$$

$$dy = \frac{1}{2}(x^2 - 2x)^{-\frac{1}{2}}\,(2x\,dx - 2\,dx)$$

$$dy = \frac{2dx(x-1)}{2(x^2-2x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$dy = \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2-2x}}$$

2. $y = \frac{2x}{\sqrt{2a^2-x^2}}$

$$y = \frac{2x}{(2a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

$$dy = \frac{(2a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\ d(2x) - 2x\ d(2a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{[(2a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}]^2}$$

$$dy = \frac{(2a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\ d(2x) - 2x\ d(2a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{[(2a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}]^2}$$

$$dy = \frac{(2a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\ [2d(x)] - 2x[\frac{1}{2}(2a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,d(2a^2-x^2)]}{(2a^2-x^2)}$$

$$dy = \frac{(2a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\ (2dx) - 2x[\frac{1}{2}(2a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}]\,[d(2a^2)-d(x^2)]}{(2a^2-x^2)}$$

$$dy = \frac{(2a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\ 2dx - 2x[\frac{1}{2}(2a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,(-2x\,dx)]}{(2a^2-x^2)}$$

$$dy = \frac{(2a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\ 2dx + \dfrac{2x^2\,dx}{(2a^2-x^2)^{1/2}}}{(2a^2-x^2)}$$

$$dy = \frac{\dfrac{2(2a^2-x^2)\quad dx + 2x^2\,dx}{(2a^2-x^2)^{1/2}}}{(2a^2-x^2)}$$

$$dy = \frac{\dfrac{4\,a^2\,dx - 2x^2\,dx + 2x^2\,dx}{(2a^2-x^2)^{1/2}}}{\dfrac{(2a^2-x^2)}{1}}$$

$$dy = \frac{4\ a^2\ dx}{(2a^2 - x^2)^{3/2}}$$

$$dy = \frac{4\ a^2\ dx}{\sqrt{(2a^2 - x^2)^3}}$$

3. $y = \frac{\sqrt[7]{(4x^2+6x-2)^5}}{8a}$

$$y = \frac{(4x^2 + 6x - 2)^{\frac{5}{7}}}{8a} \qquad d\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{du}{c}$$

$$y = \frac{\frac{5}{7}(4x^2 + 6x - 2)^{\frac{5}{7}-1}\ d(4x^2 + 6x - 2)}{8a}$$

$$y = \frac{\frac{5}{7}(4x^2 + 6x - 2)^{-\frac{2}{7}}[4d(x^2) + 6d(x) - d(2)]}{8a}$$

$$y = \frac{\frac{5}{7}(4x^2 + 6x - 2)^{-\frac{2}{7}}[4(2x\ dx) + 6\ dx}{8a}$$

$$y = \frac{\frac{5(8x\ dx + 6\ dx)}{7(4x^2 + 6x - 2)^{\frac{2}{7}}}}{\frac{8a}{1}}$$

$$y = \frac{(40x + 30)dx}{56a\ \sqrt[7]{(4x^2 + 6x - 2)^2}}$$

4. $s = 20\sqrt{7t^2 + 5\ t}$

$$s = 20(7t^2 + 5\ t)^{\frac{1}{2}}$$

$$d(cv) = c\ dv$$

$$ds = 20[\frac{1}{2}(7t^2 + 5\ t)^{\frac{1}{2}-1}d(7t^2 + 5\ t)]$$

$$ds = 20[\frac{1}{2}(7t^2 + 5\ t)^{-\frac{1}{2}}][7d(t^2) + 5d(t)]$$

$$ds = 20[\frac{1}{2}(7t^2 + 5\ t)^{-\frac{1}{2}}](14\ t\ dt\ + 5dt)$$

$$ds = \frac{10(14\ t\ dt + 5\ dt)}{(7t^2 + 5\ t)^{\frac{1}{2}}}$$

$$ds = \frac{(140\ t\ + 50)\ dt}{\sqrt{7t^2 + 5\ t}}$$

5. $y = \sqrt{10ax^2 + 5}\ (6x + 1)$

$$y = (10ax^2 + 5)^{\frac{1}{2}}\ (6x + 1)$$

$$d(uv) = u\ dv + v\ du$$

$$dy = (10ax^2 + 5)^{\frac{1}{2}}\ d(6x + 1) + (6x + 1)d(10ax^2 + 5)^{\frac{1}{2}}$$

$$dy = (10ax^2 + 5)^{\frac{1}{2}}\ [6d(x) + d(1)] + (6x + 1)[\frac{1}{2}(10ax^2 + 5)^{-\frac{1}{2}}\ d(10ax^2 + 5)]$$

$$dy = (10ax^2 + 5)^{\frac{1}{2}}\ (6dx) + (6x + 1)[\frac{1}{2}(10ax^2 + 5)^{-\frac{1}{2}}\ (20ax\ dx + d5)$$

$$dy = (10ax^2 + 5)^{\frac{1}{2}}\ (6dx) + (6x + 1)\left[\frac{10\ ax\ dx}{(10ax^2 + 5)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$dy = \left[\frac{(10ax^2 + 5)(6\ dx) + (6x + 1)(10\ ax\ dx)}{(10ax^2 + 5)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$dy = \frac{60ax^2\ dx + 30\ dx + 60\ ax^2\ dx + 10\ ax\ dx}{(10ax^2 + 5)^{\frac{1}{2}}}$$

$$dy = \frac{(120ax^2 + 30 + 10ax)\ dx}{\sqrt{10ax^2 + 5}}$$

Diferencial

Uan sección de terreno en un cuadrado con lados de 500m de longitud si se mueve de cada lado una franja de 50m para destinarse a una carretera ¿Cuánta área se pierde en esta sección?

Como la figura del terreno es un cuadrado, tenemos A = x^2

Si el lado se modifica X + Δx, el cambio de área ΔA es dado en forma aproximada por la difrencial

Δa = f´(x) Δx = 2xΔx

Donde x = 500 m y Δx = -50m

ΔA = 2 (500) (-50) = -50000m

Asi, la perdida del área aproximadamente equivalente a 50000 metros cuadrado.

Resumen Resolveremos ejercicios aplicando cinco fórmulas básicas. Luego calcularemos el área que hay: entre curvas, ejes de coordenadas, extremos superior e inferior (estos extremos también se denominan límites) También se calcula el excedente promedio de los consumidores y vendedores.

En lugar del término que hay vamos a utilizar la palabra comprendida, por lo tanto el texto debería quedar de la siguiente manera:

Resumen Resolveremos ejercicios aplicando cinco fórmulas básicas. Luego calcularemos el área comprendida: entre curvas, ejes de coordenadas (X o Y), extremos superior e inferior (estos extremos también se denominan límites).También se calcula el excedente promedio de los consumidores y vendedores.

Autoevaluación # 11

Hallar la diferencial de las siguientes expresiones:

1. $y = \sqrt[6]{(6x^2 + 3x)^1}$
2. $y = \frac{(8x^2+5x-2)^2}{3a}$
3. $y = \sqrt{10x^3 - 2x^2}(6x - 2)$
4. $y = \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{2a}{x}}$
5. $y = 3a^3 - 2a^2 + 6x - 10$
6. $y = \frac{2x}{\sqrt{2a^2 - x^2}}$

7. $y = \sqrt{\frac{2a-x}{2a+x}}$

8. $y = \frac{x}{a} - \frac{a}{x}$

9. $y = 7a\sqrt{20x^2 - 6x}$

10. $y = (6x-2)^2\sqrt{3x^2+2}$

Capítulo 4
Integrales

Resumen

Resolveremos ejercicios aplicando cinco fórmulas básicas. Luego calcularemos el área entre curvas, ejes de coordenadas, extremos superior e inferior (estos extremos también se denominan límites)

También se calcula el excedente promedio de los consumidores y vendedores.

Objetivos del aprendizaje

- Aplicar correctamente las fórmulas de integrales en las funciones.
- Calcular el área entre curvas y el eje de coordenadas aplicando integral definida.
- Calcular el punto de equilibrio entre la oferta y la demanda.

4.1 Introducción

La integración es una operación inversa de la diferenciación, utiliza el signo $\int$, que es una letra "s" deformada, letra inicial de la palabra suma. La función f(x) que así se obtiene se llama *integral de la expresión diferencial dada*; el procedimiento de hallarla se llama integración. La operación se indica escribiendo el signo ya mencionado $\int$ delante de la expresión dada; así:

$\int f'(x)\,dx = f(x)$,

que se lee: la integral de f'(x) dx es igual a f(x)

La integral se divide en integral indefinida e integral definida.

Integral definida	Integral indefinida
$\boxed{\int f'(x)\,dx}$	$\boxed{\int f'(x)\,dx}$
$\downarrow$	$\downarrow$
$\boxed{f(x)\big]_a^b}$	$\boxed{f(x)+C}$
$\downarrow$	
$\boxed{f(b)-f(a)}$	

Cada una de ellas, tiene sus propias características, la primera se debe a la constante de integración (C) y la segunda toma el nombre por los límites: límite superior y límite inferior.

La constante arbitraria C, se llama constante de integración y es una cantidad independiente de la variable de integración. Puesto que podemos dar a C cuantos valores queramos, se infiere que si una expresión diferencial dada tiene una integral, tiene también una infinidad de integrales que difieren solo en las constantes.

Por tanto, $\int f'(x)dx = f(x) + C$, y puesto que C es desconocida e indefinida, la expresión $f(x) + C$, se llama *integral indefinida* de $f'(x)dx$.

En lo que respecta a la integral definida, se representa de la siguiente manera: $\int_a^b ydx$ y literalmente se lee "la integral desde a hasta b de ydx".

La operación se llama integración entre límites o extremos, a es el límite inferior, b el límite superior.

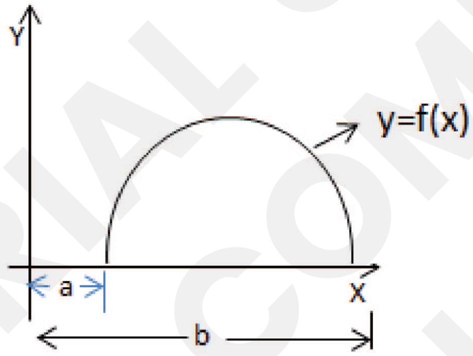


Figura 25. Gráfico de integral definida

4.2. Fórmulas de integrales inmediatas

4.2.1 Integral de una suma y resta combinadas de diferenciales

Integral de una suma y resta combinadas de diferenciales, es igual a la integral de cada una de ellas.

$\int(du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw$

Ejemplo:

$\int(4x^2 + 5x + 2)\, dx$

$\int 4x^2\, dx + \int 5x\, dx + \int 2\, dx$

$4\int x^2\, dx + 5\int x\, dx + 2\int dx$

$\frac{4x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 2x + C$

4.2.2 Integral de una constante multiplicada por el diferencial de una función

Integral de una constante multiplicada por el diferencial de una función es igual a la constante que multiplica a la integral de la función más la constante de integración.

$\int a dv = a\int dv = av + c$

Ejemplo:

$\int 8x^5 \, dx$

$8\int x^5 \, dx$

$\frac{8X^6}{6} + C$

$\frac{4X^6}{3} + C$

4.2.3 Integral de la diferencial de una función

Integral de la diferencial de una función es igual a la función más la constante de integración.

$\int dx = x + c$

Ejemplo:

$\int dy$

$y + C$

4.2.4 Integral de una función elevada a una potencia

Integral de una función elevada a una potencia es igual a la función elevada a la potencia más uno, sobre la potencia más uno, más la constante de integración.

$\int v^n d_v = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C$

Ejemplo:

$\int (9x^2 + 2)^{1/2} \, x \, dx$

$N = 1/2$

$V = 9x^2 + 2$

$dv = 18x\,dx$

$$\frac{1}{18}\int (9x^2+2)^{1/2}\,18x\,dx$$

$$\frac{1}{18}\;\frac{(9x^2+2)^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$\frac{1}{18}\;\frac{(9x^2+2)^{3/2}}{3/2} + C$$

$$\frac{2\;(9x^2+2)^{3/2}}{\underset{9}{\cancel{18}}\;(3)} + C$$

$$\frac{2\;(9x^2+2)^{3/2}}{\underset{9}{\cancel{18}}\;(3)} + C$$

$$\frac{(9x^2+2)^{3/2}}{27} + C$$

4.2.5 Integral de un cociente del diferencial de una función sobre la función

Integral de un cociente del diferencial de una función sobre la función, es igual al logaritmo natural de la función, más la constante de integración.

$$\int \frac{dv}{V} = \ln v + c$$

Ejemplo:

$$\int \frac{30x\,dx}{15x^2+5}$$

$v = 15x^2 + 5$
$dv = 30x\,dx$

$\ln(15x^2+5) + C$

Ejercicios resueltos: Integrales

Integrar las siguientes funciones:

1. $\int (6x^3 - 5x^2 + 2x)\,dx$

$\int(du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw$

$\int 6x^3dx - \int 5x^2dx + \int 2xdx$

$6\int x^3dx - 5\int x^2dx + 2\int xdx$

$$6\frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + c$$

$$\frac{3x^4}{2} - \frac{5x^3}{3} + x^2 + c$$

2. $\int (3x^2 - 5)^2 dx$

$$\int [(3x^2)^2 - 2(3x^2)(5) + (5)^2]$$

$$\int (9x^4 - 30x^2 + 25)dx$$

$9\int x^4 dx - 30\int x^2 dx + 25\int dx$

$$\frac{9x^5}{5} - \frac{30x^3}{3} + 25x + c$$

$$\frac{9x^5}{5} - 10x^3 + 25x + c$$

3. $\int \sqrt[3]{4x^2 - 6}\, xdx$

$$\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int (4x^2 - 6)^{\frac{1}{3}} xdx$$

$$n = \frac{1}{3}$$

$$v = 4x^2 - 6$$

$$dv = 8xdx$$

$$\frac{1}{8}\int (4x^2 - 6)^{\frac{1}{3}} 8xdx$$

$$\frac{1}{8}\frac{(4x^2-6)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+c$$

$$\frac{1}{8}\frac{(4x^2-6)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+c$$

$$\frac{3\sqrt[3]{(4x^2-6)^4}}{32}+c$$

4. $\int (10x^3-6)^3 x^2 dx$

$$\int v^n\,dv = \frac{v^{n+1}}{n+1}+c$$

$n = 3$

$v = 10x^3 - 6$

$dv = 30x^2 dx$

$$\frac{1}{30}\int (10x^3-6)^3\,30x^2 dx$$

$$\frac{1}{30}\cdot\frac{(10x^3-6)^{3+1}}{3+1}+c$$

$$\frac{1}{30}\cdot\frac{(10x^3-6)^4}{4}+c$$

$$\frac{(10x^3-6)^4}{120}+c$$

5. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{8x^3-5}}$

$$\int \frac{x^2 dx}{(8x^3-5)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int (8x^3-5)^{-\frac{1}{2}}\,x^2 d\,x$$

$n = \frac{1}{2}$

$v = 8\,x^3 - 5$

$dv = 24x^2 dx$

$\frac{1}{24}\int (8x^3 - 5)^{-\frac{1}{2}}\; 24x^2 dx$

$\frac{1}{24}\,(8x^3 - 5)^{-\frac{1}{2}+1}$

$\frac{1}{24}\frac{(8x^3 - 5)^{\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}+1} + \; c$

$\frac{1}{24}\frac{(8x^3 - 5)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \; c$

$\frac{2\sqrt{8x^3 - 5}}{24} + c$

$\frac{\sqrt{8x^3 - 5}}{12} + c$

6. $\int \sqrt[7]{7x^2 - 5}\; xdx$

$\int (7x^2 - 5)^{\frac{1}{7}} xdx$

$n = \frac{1}{7}$

$v = 7x^2 - 5$

$dv = 14xdx$

$\frac{1}{14}\int (7x^2 - 5)^{\frac{1}{7}}\; 14xdx$

$$\frac{1}{14}\frac{(7x^2-5)^{\frac{1}{7}+1}}{\frac{1}{7}+1}+c$$

$$\frac{1}{14}\frac{(7x^2-5)^{\frac{8}{7}}}{\frac{8}{7}}+c$$

$$\frac{7}{14}\frac{\sqrt[7]{7x^2-5)^8}}{8}+c$$

$$\frac{\sqrt[7]{(7x^2-5)^8}}{16}+c$$

7.- $\int (9ax^3-10)^{\frac{1}{3}}x^2dx$

$$n=\frac{1}{3}$$

$$v=9ax^3-10$$

$$dv=27ax^2dx$$

$$\frac{1}{27a}\int (9ax^3-10)^{\frac{1}{3}}27ax^2dx$$

$$\frac{1}{27a}\frac{(9ax^2-10)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}$$

$$\frac{1}{27a}\frac{3\sqrt[3]{(9ax^3-10)^5}}{4}+C$$

$$\frac{\sqrt[3]{(9ax^3-10)^5}}{108a}+C$$

8. $\int \frac{x^4dx}{x-1}$

Cuando el numerador tiene potencia mayor o igual que el denominador se divide de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^4+x^3} & x^3+x^2+x+1 \\
// \quad x^3 & \\
\underline{-x^3+x^2} & \\
// \quad x^2 & \\
\underline{-x^2+x} & \\
// \quad x & \\
\underline{-x+1} & \\
// +1 &
\end{array}
$$

Entonces tenemos:

$$\int (x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1})\, dx$$

$$\int x^3 dx + \int x^2 dx + \int x dx + \int dx + \int \frac{dx}{x-1}$$

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln(x-1) + c$$

9. $\int \frac{X^6 dx}{x+1}$

Cuando el numerador tiene potencia mayor o igual al denominador, se divide el numerador para el denominador.

$$
\begin{array}{l|l}
x^6 & x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^6-x^5} & x^5-x^4+x^3-x^2+x-1 \\
// \quad -x^5 & \\
\underline{+x^5+x^4} & \\
// \quad +x^4 & \\
\underline{-x^4-x^3} & \\
// \quad -x^3 & \\
\underline{+x^3+x^2} & \\
// \quad +x^2 & \\
\underline{-x^2-x} & \\
// \quad -x & \\
\underline{+x+1} & \\
+1 &
\end{array}
$$

Entonces tenemos:

$$\int .(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1+\frac{1}{x+1})\, dx$$

$$\int x^5dx - \int x^4dx + \int x^3dx - \int x^2dx + \int xdx - \int dx + \int \frac{dx}{x+1}$$

$$\frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) + C$$

Autoevaluación # 12

Integrar las siguientes funciones, utilizando fórmulas.

a. $\int \sqrt{6x^2 - 3}\; x dx$

b. $\int (4x^2 - 6x)^2\, dx$

c. $\int (9x^2 - 3)^3 dx$

d. $\int \frac{x^5 dx}{x+1}$

e. $\int \frac{x^3 dx}{x^2+2}$

f. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[4]{5x^4+2}}$

g. $\int \sqrt{4ax^2 - 5}\, x dx$

h. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9x^3+2}}$

i. $\int (7x^2 - 2)^3 x dx$

j. $\int \frac{x^5 dx}{x+3}$

4.3 Cálculo de área

Para calcular el área de una figura geométrica tomamos en consideración la región comprendida entre los puntos de pares ordenados, los ejes en referencia y la primera derivada.

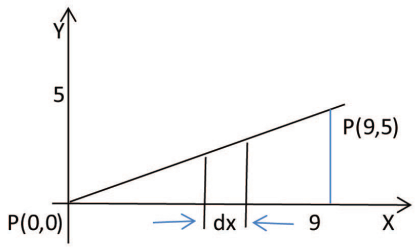
Ejercicios resueltos: Cálculo de área

1. Dado los puntos PA (0 ; 0) y PB (9 ; 5)

   a. Ubicar los puntos en el plano

b. Hallar la ecuación de la recta AB

c. Calcular el área que está comprendida entre la recta y el eje de las x



PA(0,0)x PB(9,5)

Figura 26. Gráfico de la función.

b. $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{5-0}{9-0} = \frac{5}{9}$$

$$y = 0 = \frac{5}{9}(x - 0)$$

$$y = \frac{5}{9}x$$

c. $dA = ydx$

$$dA = \frac{5}{9}xdx$$

$$\int dA = \frac{5}{9}\int_0^9 xdx$$

$$A = \frac{5}{9}\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^9$$

$$A = \frac{5}{9}\left[\frac{(9)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right]$$

$$A = \frac{5}{9}.\frac{81}{2}$$

$$A = \frac{45}{2}u^2$$

2. Dados los puntos P1(0,7) y P2 (8,0)

    a. Ubicarlos en el plano

    b. Hallar la ecuación del segmento de la recta P1P2

    c. Calcular el área que está comprendida entre la recta y los ejes

a.

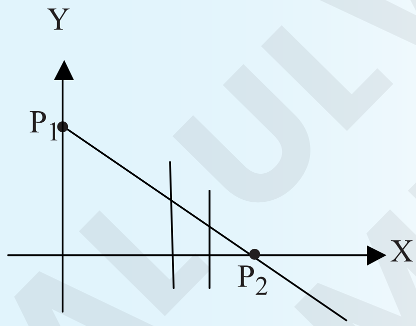


Figura 27. Gráfico de la función

b. $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$m = \frac{0-7}{8-0} = -\frac{7}{8}$$

$$y - 0 = -\frac{7}{8}(x-8)$$

$$y = -\frac{7}{8}x + 7$$

c. $dA = ydx$

$$\int dA = \int_0^8 \left(-\frac{7}{8}x + 7\right) dx$$

$$A = -\frac{7}{8}\int_0^8 xdx + 7\int_0^8 dx$$

$$A = -\frac{7}{8}\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^8 + 7(x)_0^8$$

$$A = -\frac{7}{8}\left[\frac{(8)^2}{2} - \frac{(0)}{2}\right] + 7(8-0)$$

$$A = -\frac{56}{2} + 56$$

$$A = \frac{-56+112}{2}$$

$$A = \frac{56}{2} = 28u^2$$

3. Dados los puntos PA (0,0); PB (7,8) y PC(14,0), calcular el área del triángulo, utilice integrales

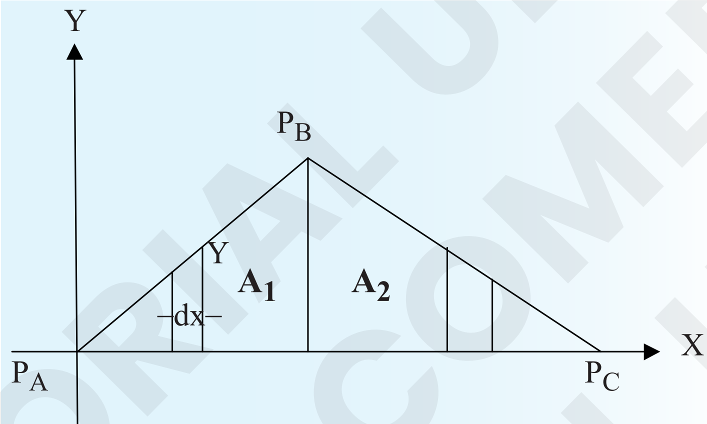


Figura 28. Gráfico de la función

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{8-0}{7-0} = \frac{8}{7}$$

$$y - 0 = \frac{8}{7}(x - 0)$$

$$y = \frac{8}{7}x$$

$$\int dA = ydx$$

$$\int dA = \frac{8}{7}xdx$$

$$\int dA = \frac{8}{7}\int_0^7 xdx$$

$$A_1 = \frac{8}{7}.\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^7$$

$$A_1 = \frac{8}{7}\left[\frac{(7)^2}{2} - \frac{(0)^0}{2}\right]$$

$$A_1 = \frac{8}{7}.\frac{49}{2}$$

$$A_1 = 28u^2$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{0 - 8}{14 - 7} = -\frac{8}{7}$$

$$y - 0 = -\frac{8}{7}(x - 14)$$

$$y - 0 = -\frac{8}{7}\,x + 16$$

$$dA = ydx$$

$$dA = \left(-\frac{8}{7}x + 16\right)dx$$

$$\int dA = -\frac{8}{7}\int_7^{14} xdx + 16\int_7^{14} dx$$

$$A2 = -\frac{8}{7}\left(\frac{x^2}{2}\right)_7^{14} + 16(x)_7^{14}$$

$$A2 = -\frac{8}{7}\left(\frac{196}{2} - \frac{49}{2}\right) + 16(7)$$

$$A2 = -\frac{8}{7}\left(\frac{196-49}{2}\right)+112$$

$$A2 = -\frac{8}{7}\left(\frac{147}{2}\right)+112$$

$$A2 = -84+112$$

$$A2 = +28u^2$$

$$AT = 28u^2 + 28u^2$$

$$AT = 56u^2$$

4. Dados los puntos PA (0,0); PB (5,10) y PC (9,0). Calcular el área del triángulo, utilice integrales

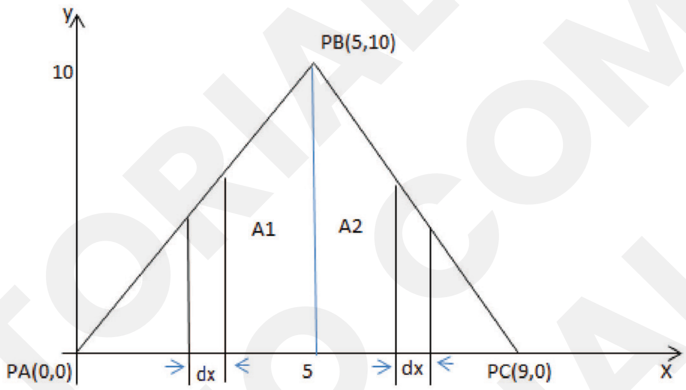


Figura 29. Gráfico de la función

Hallar la ecuación AB Hallar la ecuación BC

Ecuación $\overline{AB}$

$$y = \frac{10-0}{5-0} = \frac{10}{5} = 2$$

$$y - 0 = 2(x-0)$$

$$y = 2x$$

Ecuación $\overline{BC}$

$$m = \frac{0-10}{9-5} = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2}$$

$$y - 0 = -\frac{5}{2}(x-9)$$

$$y = -\frac{5}{2}x + \frac{45}{2}$$

Hallar el área

$$dA = ydx$$

$$\int dA = \int \left(-\frac{5}{2}x + \frac{45}{2}\right)_{s}^{9} dx$$

$$\int dA = -\frac{5}{2}\int xdx + \frac{45}{2}\Big)_{s}^{9} dx$$

$$A = -\frac{5}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)_{s}^{9} + \frac{45}{2}\left(x\right)_{s}^{9}$$

$$A_2 = -\frac{5}{2}\left(\frac{9^2}{2} - \frac{5^2}{2}\right) + \frac{45}{2}(9-5)$$

$$A_2 = -\frac{5}{2}\left(\frac{81-25}{2}\right) + \frac{45}{2}(4)$$

$$A_2 = -\frac{5}{2}\left(\frac{56}{2}\right) + 90$$

$$A_2 = -\frac{5}{2}(28) + 90$$

$$A_2 = -70 + 90$$

$$A_2 = 20\ U^2$$

$$A\ total = A_1 + A_2$$

$$A\ total = 25u^2 + 20u^2$$

$$A\ total = 45u^2$$

4.4 Aplicación del cálculo integral al campo económico

4.4.1 Excedente de los consumidores (demanda)

4.4.1.1 Excedente

El excedente (excedente económico, bienestar total o excedente Marshaliano) se refiere a la suma de dos excedentes: el excedente del productor o el excedente del consumidor.

4.4.1.2 Excedente del consumidor

Se considera la diferencia existente entre la cantidad máxima que un consumidor está dispuesto a pagar por una cantidad determinada de un bien y lo que en realidad paga por esa cantidad.

4.4.1.3 Excedente del productor

Es la cantidad monetaria con la que los productores se benefician por vender al precio del mercado que es mayor que su máximo precio de disponibilidad para vender.

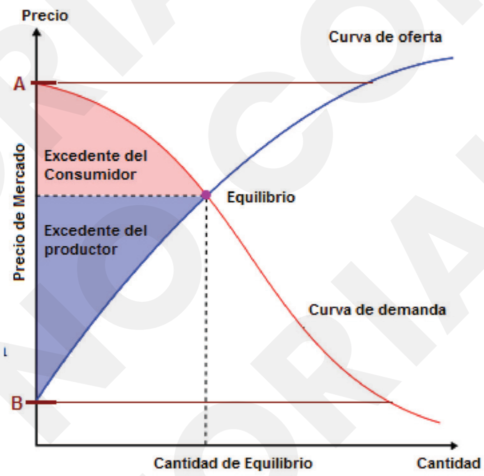


Figura 30. Gráfico del punto de equilibrio entre oferta y demanda.

4.4.1.4 Excedente de la producción

Es la parte de la producción que sobra una vez cubiertas las necesidades y el consumo corriente. El excedente puede acumularse (almacenarse) o si es convertido en moneda es posible su ahorro.

4.4.1.5 Excedente económico o plusvalía

El excedente económico real es la diferencia entre la producción real generada por la sociedad y su consumo efectivo corriente. Resulta por lo tanto, idéntico al ahorro o acumulación normalmente mediante activos (instalación de equipos, saldos positivos resultados del comercio exterior, atesoramiento de monedas de oro). El excedente económico es menor que la noción de plusvalía de Karl Marx. Así resulta que el excedente económico real es la parte de la plusvalía que está siendo acumulada y vende, por eso se debe recalcar que todos los entes económicos deben estar perfectamente equilibrados, para que así las fuerzas motoras de una economía no tengan ningún impacto en las decisiones del consumidor.

Ejercicios resueltos: Excedente

1. En la comercialización de un producto, la tendencia de comprar a los consumidores es $y = 90\text{-}3x^2$ y la participación de los vendedores es $y = 40+x^2$.

Determinar:

a. El gráfico superpuesto de las líneas de demanda y oferta.

b. El precio de equilibrio de mercado y el número de consumidores del producto que pueden pagar el precio del mercado.

c. El excedente promedio de los consumidores favorecidos al comprar al precio de equilibrio.

Desarrollo:

a. Para graficar las curvas tabulamos cada una de ellas y luego graficamos.

$Yd = 90 - 3x^2 \; Y_o = 40 + x^2$

X	Y
0	130
1	126
2	114
3	94
4	66

X	Y
0	50
1	53
2	62
3	77

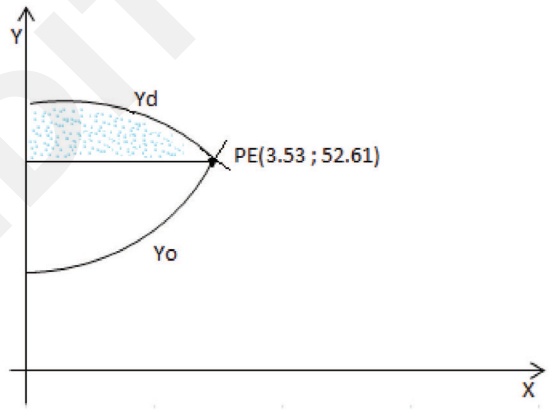


Figura 31. Gráfico de la función

Consumo

b. Como podemos observar el punto de equilibrio no lo hemos hallado en la tabulación, por lo tanto lo buscamos analíticamente.

$$Y_d = Y_o$$

$$90 - 3x^2 = 40 + x^2$$

$$-x^2 - 3x^2 = 40 - 90$$

$$-4x^2 = -50$$

$$x^2 = \frac{-50}{-4}$$

$$x^2 = 12.5$$

$$x = 3.53$$

Reemplazamos X= 3.53 en la y_D o y_O

$$Y_D = 90 - 3(3.53)^2$$

$$Y_D = 90 - 37.38$$

$$Y_D = \$52.61$$

$$P.E.(3.53; 52.61)$$

c. da = ydx

Como la región sombreada está comprendida entre la curva de la demanda y la recta y=52.61, establecemos la siguiente diferencia:

$$dA = (y - 52.61)dx$$

$$dA = (90 - 3x^2 - 52.61)dx$$

$$dA = (37.39 - 3x^2)dx$$

$$\int dA = \int (37.39 - 3x^2)dx$$

$$\int dA = 37.39\int_0^{3.53} dx - 3\int_0^{3.53} x^2 dx$$

$$A = 37.39(x)_0^{3.53} - 3\left[\frac{(3.53)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3}\right]$$

$$A = 131.98 - 3\left(\frac{43.98}{3}\right)$$

$$A = 131.98 - 43.98$$

$$A = \$88\ consumidores$$

Para calcular el excedente promedio utilizamos la siguiente fórmula:

$$Ec = \frac{\$88}{3.53}\ Ec = \$24.92$$

2. Las ecuaciones de demanda y oferta en la comercialización de un artículo son $y = 130 - 4x^2$, $y = 50 + 3x^2$; respectivamente.

Determinar:

a. El gráfico superpuesto de las líneas de demanda y oferta.

b. El precio de equilibrio de mercado.

c. El excedente promedio o superávit de los consumidores favorecidos al comprar al precio de equilibrio.

Ejercicio de reforzamiento:

Tabulemos las ecuaciones de demanda y oferta

$Y_D = 130 - 4x^2$ $Y_o = 50 + 3x^2$

X	Y
0	130
1	126
2	114
3	94
4	66

X	Y
0	50
1	53
2	62
3	77

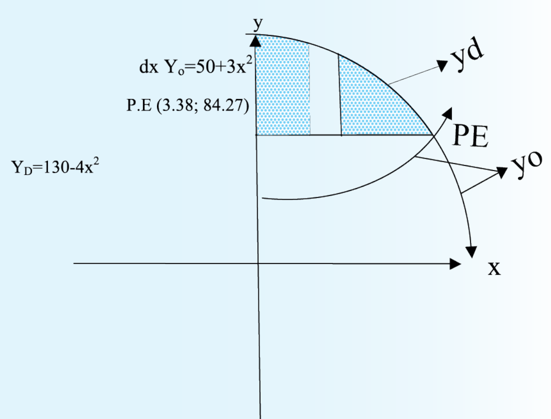


Figura 32. Gráfico de la función

Buscamos el punto de equilibrio entre las curvas, relacionados

$Y_D = Y_O$

$130 - 4x^2 = 50 + 3x^2$

$-4x^2 - 3x^2 = 50 - 130$

$-7x^2 = -80$

$x^2 = \frac{-80}{-7}$

$x^2 = 11.42$

$x = \pm 3.38$

Reemplazamos x=3.38 en la demanda o en la oferta

$y_O = 50 + 3(3.38)^2$

$Y_O = 50 + 34.27$

P.E. (3.38 ; 84.27)

Como la región sombreada está comprendida entre las curvas de la demanda y la recta y=84.27, establecemos la siguiente diferencia:

$dA = (y - 84.27)dx$

$dA = [130 - 4x^2 - 84.27]dx$

$dA(45.73 - 4x^2)dx$

$\int dA = 45.73 \int_0^{3.38} dx - 4 \int_0^{3.38} x^2 dx$

$A = 45.73(x)_0^{3.38} - 4\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^{3.38}$

$A = 45.73(3.38 - 0) - 4\left[\frac{(3.38)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3}\right]$

$$A = 154.56 - 4\left(\frac{38.61}{3}\right)$$

$$A = 154.56 - 51.48$$

$$A = \$103.07\ consumidores$$

Para calcular el excedente promedio de los consumidores, utilizamos la fórmula:

$$E.C = \$\frac{103.07}{3.38} \qquad E.C = \$30.49$$

Ejercicios resueltos: Excedente de los vendedores (ofertantes)

1. Las funciones de demanda y oferta en un mercado de competencias es $y = 60 - 2x^2$; $y=25+x^2$.

Determinar:

a. El precio de equilibrio de mercado

b. El excedente promedio de los vendedores que se favorecen vendiendo al precio del mercado que es superior a lo que ellos podrían comprar.

$Y_D = 60 - 2X^2$ $Y_O = 25 + X^2$

X	Y
0	60
1	58
2	52
3	42
4	28

X	Y
0	25
1	26
2	29
3	34

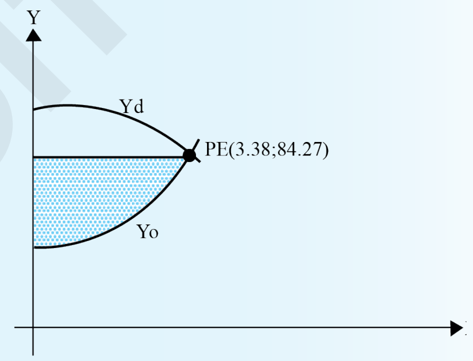


Figura 33. Excedentes de los vendedores

Igualamos las dos ecuaciones

$60 - 2x^2 = 25 + x^2$

$-2x^2 - x^2 = 25 - 60$

$-3x^2 = -35$

$x^2 = \frac{-35}{-3}$

$x = 11.66$

$x = 3.41$

Reemplazamos X=3.41

$Y_D = 60 - 2X^2$

$Y_D = 60 - 2(3.41)^2$

$Y_D = 60 - 23.25$

$Y_D = 36.74$

$P.E(3.41; 36.74)$

Como la región sombreada está comprendida entre las curvas de la oferta y la recta y=36.74, establecemos la siguiente diferencia:

$dA = yxd$

$dA = [36.74 - (25 + x^2)]dx$

$dA = (36.74 - 25 - x^2)dx$

$dA = (11.74 - x^2)dx$

$$\int dA = 11.74 \int_0^{3.41} dx - \int_0^{3.41} x^2 dx$$

$$A = 11.74(x)_0^{3.41} - \left(\frac{x^3}{3}\right)^{3.41}$$

$$A = 11.74(3.41 - 0) - \left[\frac{(3.41)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3}\right]$$

$$A = 40.03 - \frac{39.65}{3}$$

$$A = 40.03 - 13.21$$

$$A = \$26.82\ ofertantes$$

$$Ev = \frac{\$26.82}{3.41}$$

$$Ev = \$7.86$$

2. Si la función de demanda y ofertante es: $y_d = 95 - 3x^2$; $y_o = 34 + 2x^2$, respectivamente.

Determinar:

a. El precio de equilibrio de mercado

b. El excedente promedio de los vendedores que se favorecen vendiendo al precio de mercado que es superior a lo que ellos podrían comprar.

$Y_D = 95 - 3X^2$ $Y_O = 34 + 2X^2$

X	Yd
0	95
1	92
2	83
3	68
4	47

X	Yo
0	34
1	36
2	42
3	52
4	66

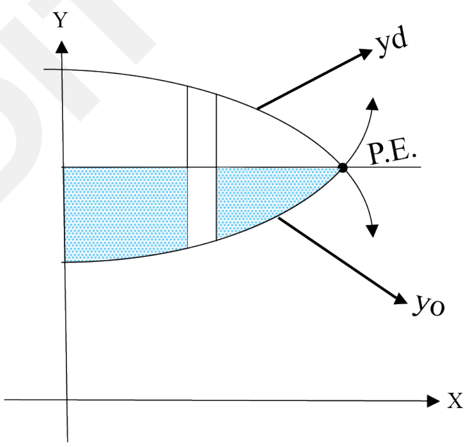


Figura 34. Excedentes de los vendedores

Como el punto de equilibrio no lo encontramos tabulando, recurrimos al método de igualación.

$95 - 3x^2 = 34 + 2x^2$

$-3x^2 - 2x^2 = 34 - 95$

$-5x^2 = -61$

$x^2 = \frac{61}{5}$

$x^2 = 12.2$

$x = \pm 3.49$

De los dos valores, el valor considerado es el positivo y reemplazamos x=3.49

$Y_D = 95 - 3(3.49)^2$

$Y_D = 95 - 36.54$

$Y_D = \$58.45$

Como la región sombreada está comprendida entre las curvas de la oferta y la recta y=58.45, establecemos las siguientes diferencias:

$dA = ydx$ $A = 85.33 - 28.33$

$dA = [58.45 - (34 + 2x^2)]dx$

$dA = (58.45 - 34 - 2x^2)dx$

$dA = (24.45 - 2x^2)dx$

$\int dA = 24.45 \int_0^{3.49} dx - 2 \int_0^{3.49} x^2 dx$

$A = 24.45(x)_0^{3.49} - 2\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^{3.49}$

$A = 24.45(3.49 - 0) - 2\left[\frac{(3.49)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3}\right]$

A= 85.33 - 28.33

A= \$57.00

$$Ev = \frac{57}{3.49}$$

$$Ev = \$\ 16.33$$

4.5 Mercado monopolio

4.5.1 Monopolio: Concepto.

Un monopolio (del griego *monos* "uno" y *polein* "vender") es una situación de privilegio legal o fallo de mercado en el cual existe un producto (monopolista) u ofertante que posee un gran poder de mercado y es el único en una industria dada, o que posee un producto, bien, recurso o servicio determinado y diferenciado.

Para que exista monopolio es necesario que en dicho mercado no existan productos sustitutos, es decir, que no exista ningún otro bien que pueda reemplazar al producto; por lo tanto, es la única alternativa que tiene el consumidor para comprar.

El monopolista controla la cantidad de producción y el precio, aunque no de manera simultánea, vale decir, el monopolio podría determinar en primer lugar la tasa de producción que maximiza sus ganancias para luego determinar, mediante el uso de la curva de demanda, el precio máximo que puede combinarse para vender dicha producción.

Ejercicios resueltos: Monopolio

El costo unitario del producto es \$15,00, la demanda de los consumidores del mercado está dada por la función $yd=105-2x^2$.

Determinar:

a. El precio unitario de venta que debe fijar el monopolista de mercado para lograr la mejor utilidad del negocio.

b. El excedente promedio de los consumidores.

Desarrollo:

Función de Ingreso (I)= (precio unitario) unidades

$$F.I = (105 - 2x^2)\ x$$

$$F.I = 105x - 2x^3$$

Luego, derivamos la función ingreso

$$\frac{FI}{dx} = 105 - 6x^2$$

Derivamos el costo unitario de fabricación, es decir 15x

$$\frac{dc}{dx} = 15$$

Igualamos:

Derivados de los Ingresos = Derivados de los Costos

$$105 - 6x^2 = 15$$

$$-6x^2 = 15 - 105$$

$$-6x^2 = -90$$

$$x = 3.87$$

Este valor x=3.87 lo reemplazamos en la función de la demanda

$$yd = 105 - 2x^2$$

$$yd = 105 - 2(3.87)^2$$

$$yd = 105 - 29.95$$

$$yd = \$\ 75.04$$

El excedente promedio de los consumidores

$$yd = 105 - 2x^2$$

x	yd
0	105
1	103
2	97
3	87
4	73

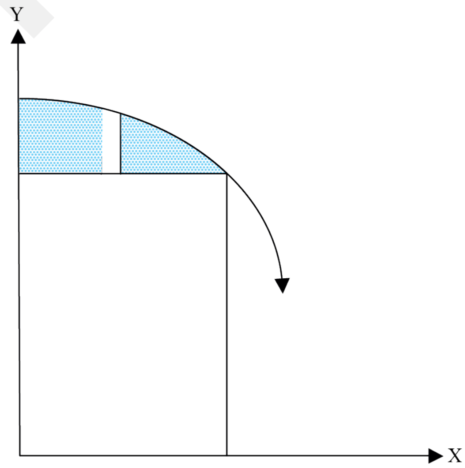


Figura 35. Gráfico de la función.

$dA = ydx$

$dA = (y - 75.04)dx$

$dA = (105 - 2x^2 - 75.04)dx$

$dA = (29.96 - 2x^2)dx$

$$\int dA = 29.96 \int_0^{3.87} dx - 2 \int_0^{3.87} x^2 dx$$

$$A = 29.96(x)_0^{3.87} - 2\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^{3.87}$$

$$A = 29.96\ (3.87 - 0) - 2\left[\frac{(3.87)^3}{3} - \frac{(0)^2}{3}\right]$$

$A = 115.94 - 38.64 = 77.29$

$A = \$77.29\ \ consumidores$

$$Ec = \frac{\$77.29\ consumidores}{3.87}$$

$Ec = \$19.97$

2. El costo unitario del producto es de \$32,00. La demanda de los consumidores del mercado está dada por la función yd=75-3x^2.

Determinar:

a. El precio unitario de venta que debe fijar el monopolista de mercado para lograr la mayor utilidad del negocio

b. El excedente promedio de los consumidores.

Utilidad = Ingreso de venta – Costo

Ahora tenemos,

Ingreso de ventas = precio (unidades)

$R = 75 - 3x^2$

$R = 75x - 3x^3$

Derivamos la función,

$R = 75x - 3x^3$

$$\frac{dR}{dX} = 75 - 9x^2$$

Calculamos los costos totales,

Costo = Costo unitario (unidad)

$C = 32(x)$

$C = 32x$

Derivamos la función costo,

$$\frac{dC}{dX} = 32$$

Igualamos,

$75 - 9x^2 = 32$

$-9x^2 = 32 - 75$

$-9x^2 = -43$

$$x^2 = \frac{-43}{-9}$$

$x^2 = 4.7777$

$x = 2.18$

Reemplazaremos X=2.18 en $yd=75-3x^2$

$yd = 75 - 3(2.18)^2$

$yd = 75 - 14.25$

$yd = \$60.74$

$yd = 75 - 3x^2$

x	Yd
0	75
1	72
2	63
3	48

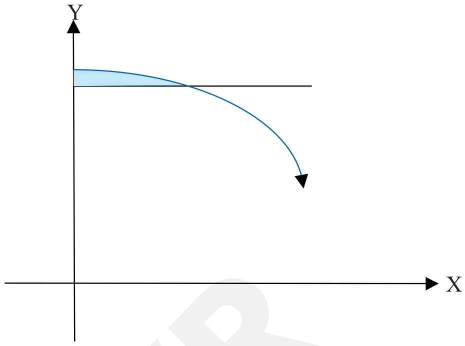


Figura 36. Gráfico de la función.

$dA = ydx$

$dA = (yd - y)dx$

$dA = [(75 - 3x^2) - 60.74]dx$

$dA = (14.26 - 3x^2)dx$

$$\int dA = 14.26 \int_0^{2.18} dx - 3 \int_0^{2.18} x^2 dx$$

$$A = 14.26(x)_0^{2.18} - 3\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^{2.18}$$

$$A = 14.26(2.18 - 0) - 3\left[\frac{(2.18)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3}\right]$$

$A = 31.08 - 10.36$

$A = \$20.71\ consumidores$

$$Ec = \frac{\$20.71}{2.18}$$

$Ec = \$9.50$

Autoevaluación # 13

1. La demanda y la oferta en mercado competitivo están dados por las expresiones:
   $y = 95 - 2x^2$; $y = 45 + 5x^2$

Determinar:

a. El precio de venta fijado por la competencia

b. El excedente promedio de los vendedores

El costo unitario del producto es de $55.90, la demanda de los consumidores del mercado está dada por la función $y = 85 - 2x^2$

Determinar:

a. El precio unitario de venta que debe fijar el monopolio de mercado para lograr la mejor utilidad del negocio

b. El excedente promedio de los consumidores

3. Si el costo unitario del producto es de $29.10, la demanda de los consumidores es de $yd = 56 - 3x^2$

Determinar:

a. El precio unitario de venta que debe fijar el monopolista de mercado para lograr la mejor utilidad del negocio

b. El excedente promedio de los consumidores

4. En la comercialización de un producto la tendencia de compra de los consumidores es $y = 65 - x^2$ y la participación de los vendedores es $y = 95 + 3x^2$

Determinar:

a. El gráfico superpuesto de las líneas de demanda y oferta.

b. El precio de equilibrio de mercado y el número de consumidores del producto que pueden pagar el precio de mercado.

c. El excedente promedio de los consumidores favorecidos al comprar al precio de equilibrio.

5. Las funciones de demanda y oferta en un mercado de competencia son: $yd = 80 - 2x^2$; $yo = 20 + 4x^2$

Determinar:

a. El precio de equilibrio de mercado

b. El excedente promedio de los ofertantes o vendedores que se favorecen vendiendo al precio de mercado.

6. Dadas las funciones $y = 2 - 3x^2$; $y = 18 + 5x^2$, demanda y oferta respectivamente.

Determinar:

a. El gráfico superpuesto de las líneas de demanda y oferta.

b. El precio de equilibrio de mercado y el número de consumidores del producto que pueden pagar al precio de mercado.

c. El excedente promedio de los vendedores que se favorecen vendiendo al precio de mercado.

Referencias

Adams, R. (2009). *Cálculo* (6º ed.). England: Addison-Wesley.

Arya, J., Lardner, R. e Ibarra, V. (2009). *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía (5º ed.)*. México: Pearson Educación.

Ayres, F. y Dickinson, E. (2011). *Cálculo diferencial e integral (3º ed.)*. Madrid: McGraw-Hill.

Granville, W. (2010). *Cálculo Diferencial e Integral.* México: Limusa.

Márquez, A. (2010). *Matemáticas simplificadas (2º ed.)* México: Pearson-Conamat.

Sydsaeter, K. y Hammond, P. (2010). *Matemáticas para el análisis económico (2º ed.)*. Madrid: Pearson.

Pedro Correa Mendoza

Profesor Titular de la Universidad Laica VICENTE ROCAFUERTE de Guayaquil (Facultad de Ciencias Administrativas), profesor titular de la Universidad Estatal de Guayaquil (Facultad de Ingeniería Industrial), Profesor Titular Colegio Fiscal de Bachillerato Simón Bolívar, Ingeniero Industrial (1983), Diplomado en Docencia Superior (1998). Especialista en Procesos Educativos (2005), Magister en Gerencia Educativa (2006). Mejor Docente Facultad de Ciencias Administrativas de la ULVR (2005), Mejor Docente Facultad de Ingeniería Industrial de la Universidad de Guayaquil (2014).

EDITORIAL ULVR
UNIVERSIDAD LAICA
VICENTE ROCAFUERTE DE GUAYAQUIL

ISBN: 978-9942-920-48-5
9 789942 920485